técnica

31

associação dos estudantes do instituto superior técnico

outubro 1963 revista de engenharia

CIMENTO SECIL

Fábrica:

Outão — Setúbal

Telef. 228824/5

Escritório:

R. do Comércio, 56-3.º

LISBOA 2

Telef. 328201/2/3

confiança para a construção com

materiais novobra

EM BETÃO PRÉ-ESFORÇADO

pavimentos
coberturas
vigas de grande vão
asnas
perfis

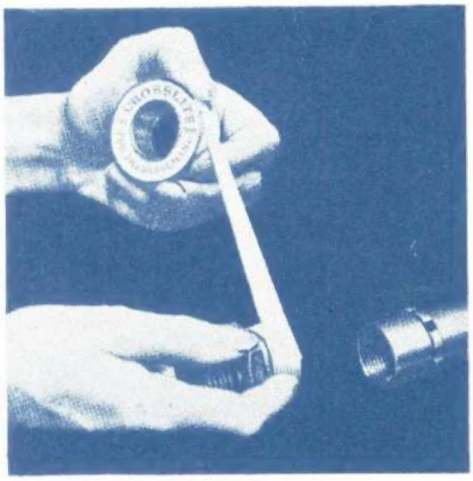
SOCIEDADE DE PRÉ-FABRICAÇÃO E OBRAS GERAIS, NOVOBRA, LDA.
AV. EST. UNIDOS DA AMÉRICA, 100, 5.º D. - TEL. 774832/766446 - LISBOA-5

TEM CANALISAÇÕES DE VAPOR NA SUA FÁBRICA ?
TEM TRANSPORTE DE GASES ?
TEM TRANSPORTE DE FLUÍDOS CORROSIVOS ?

Então tem problemas nas tubagens :

1 — Fugas **2 — Corrosão** **3 — Calcinação das juntas**

AO SEU SERVIÇO — a última conquista da química neste sector :



CROSSLITE — Fita vedante para ligações tubulares à base de Polytetrafluoreto de Etilene

- Adesão e cobertura perfeita de todas as irregularidades da rosca.
- Insolúvel e **absolutamente inerte** ao ataque químico de qualquer substância.
- Não contamina as substâncias em processo através da tubagem.
- Resiste a temperaturas de — 100º C a + 300º C.
- Preserva impecàvelmente o sistema roscado ao fim de meses ou anos de trabalho.

Um produto de

HENRY CROSSLEY LTD. — Bolton — ENGLAND

Todos os acessórios para vedação

1 bobine : ca. 14 mts. comprimento
ca. 1,5 cm. largura

Representante exclusivo :

SIDROL — Sociedade Importadora de Drogas, Lda.
Calçada de Monchique n.º 3 — PORTO — Telefs. 27826 e 32055

TÉCNICA

Ano XXXVIII - N.º 331 Outubro de 1963

Redacção e Administração: AVENIDA ROVISCO PAIS, I.S.T. * LISBOA-1. * TELEF. 77 01 44 (Linha 50)

CORPO REDACTORIAL

J. M. VIEGAS GONÇALVES
J. F. GOMES DE PINA
F. G. KNOPFLI BATORÉU
A. M. L. ESTEVES BRINCA

NUMERO AVULSO 15$00

ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	10 N.os
Continente e Ilhas	37$50	60$00	110$00
Ultramar Português e Espanha	—	65$00	120$00
Estrangeiro	—	70$00	130$00

PUBLICAÇÃO PERIÓDICA MENSAL

EDITOR E PROPRIETÁRIO
ASS. DOS ESTUD. DO I.S.T.

COMPOSTO E IMPRESSO
NA
Tip. JORGE FERNANDES, L.DA
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

CAPA — SOREFAME — Aspecto parcial da Oficina de Material Circulante

Págs.

Congresso do Ensino de Engenharia — Conclusões gerais 1

Notas informativas — **Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional** . . 6 e 46

Tratamento matemático dos movimentos vibratórios de características lineares
Por Jorge Neves da Silva 7

Estabilidade e repartição dos escoamentos em superfícies de aquecimento com circulação forçada
Por José Joaquim Delgado Domingos 27

Flexão simples — Contribuição para a apresentação do cálculo em relação à rotura (Fase III)
Por G. Faria de Vasconcelos 33

Relação de fragmentação a 80 % em circuitos complexos
Por José Manuel Torres 47

Sugestão para melhoramento de uma ventosa
Por António Manuel de Vasconcelos 59

Biblioteca 61

OS ARTIGOS PUBLICADOS NESTA REVISTA SÃO DE EXCLUSIVA RESPONSABILIDADE DOS AUTORES

Índice Alfabético dos nossos anunciantes

Pág.

A

Agência Comercial, Lda. IV
A. Johnson & Co (Portugal), Ltd. . . XXXIX
Agro-Mecânica XXVI
Araldite XXX
Asea Eléctrica Ld.ª XX
Auto-Lusitânia XXXII

C

CIDEX IV
Cidla XLIII
Cimento Secil . . . . . 2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos . . VIII
Companhia Portuguesa de Fornos Eléctricos IX
Companhia Portuguesa de Trefilaria XXVIII
Companhia União Fabril . . . XIV e XV
C. Santos, Ltd.ª . . . . . VI e XLI
Construções Técnicas XXIII
Crosslite . . . . . 2.ª da capa
Cummins XLVI

E

Ecomar XLII
Electro-Arco, Ltd.ª XXXII
Electrotécnicos Reunidos XXXIV
Emílio de Azevedo Campos & C.ª, Ltd.ª XXVI
Empresa de Cimentos de Leiria . . XXXVII
Empresa Electro Cerâmica XLI
Empresa de Produtos Asfálticos. . . X
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Ltd.ª . . . . . 3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações XXVIII
Empresa de fundações A. Cavaco . XXXII

F

Fábrica de Loiça de Sacavém XXXII
Fábrica Portugal II
Fanafel XVI
Filtros Filfro XX
Fundações Franki, Lda. I

G

General Electric . . . . . XXIV e XXV
George Fischer XXXIII
Guedes & Almeida, Lda. XLVIII

H

Harker Sumner & C.ª, Ltd. XL
Hidrel XXXII

I

Impermeábilis XXVIII
Isolux XLVII
I. S. T. . . . . 2.ª da capa

Pág.

J

Jayme da Costa, Lda XIX
J. J. Gonçalves — Austin XXXI

L

Leopoldo Shiroi XLIV

M

MAGUE XIII
Metalúrgica Duarte Ferreira . . . XXXVI
Modern Office XLI
Monteiro Gomes, Lda. XLII
Monterroso & C.ª, Lda. XLVII

N

Novobra, Lda. . . . . 2.ª da capa
Noco Sun Sash XLIV

O

Orlando Fernandes XVI

P

Philips XXXI
Pimentel & Casquilho, Ltd.ª III
Petróleos B P XXXVIII

Q

Quimicor, S.A R.L. . . . . XVII e XVIII
Química Hoechst XL

S

Siemens XXXV
Soabal, Ltd. XXX
S. Com. de Isolamentos de Cortiça XXXIX
SMEIA XXVII
Sociedade Comercial Luso-Italiana XLV
Sociedade de Electricidade Brown Boveri . . . . . 4.ª da capa
Sociedade Industrial Metalúrgica . XL
Soc Michaelis de Vasconcelos . . . XII
Sociedade Portuguesa Cavan VIII
Sondagens e Fundações, A Cavaco . XLIV
Sondagens Ródio, Ltd.ª XLIV
Standard Eléctrica VII
S. T. F. T. . . . . XXI e XXII

T

Telemec XLVI

U

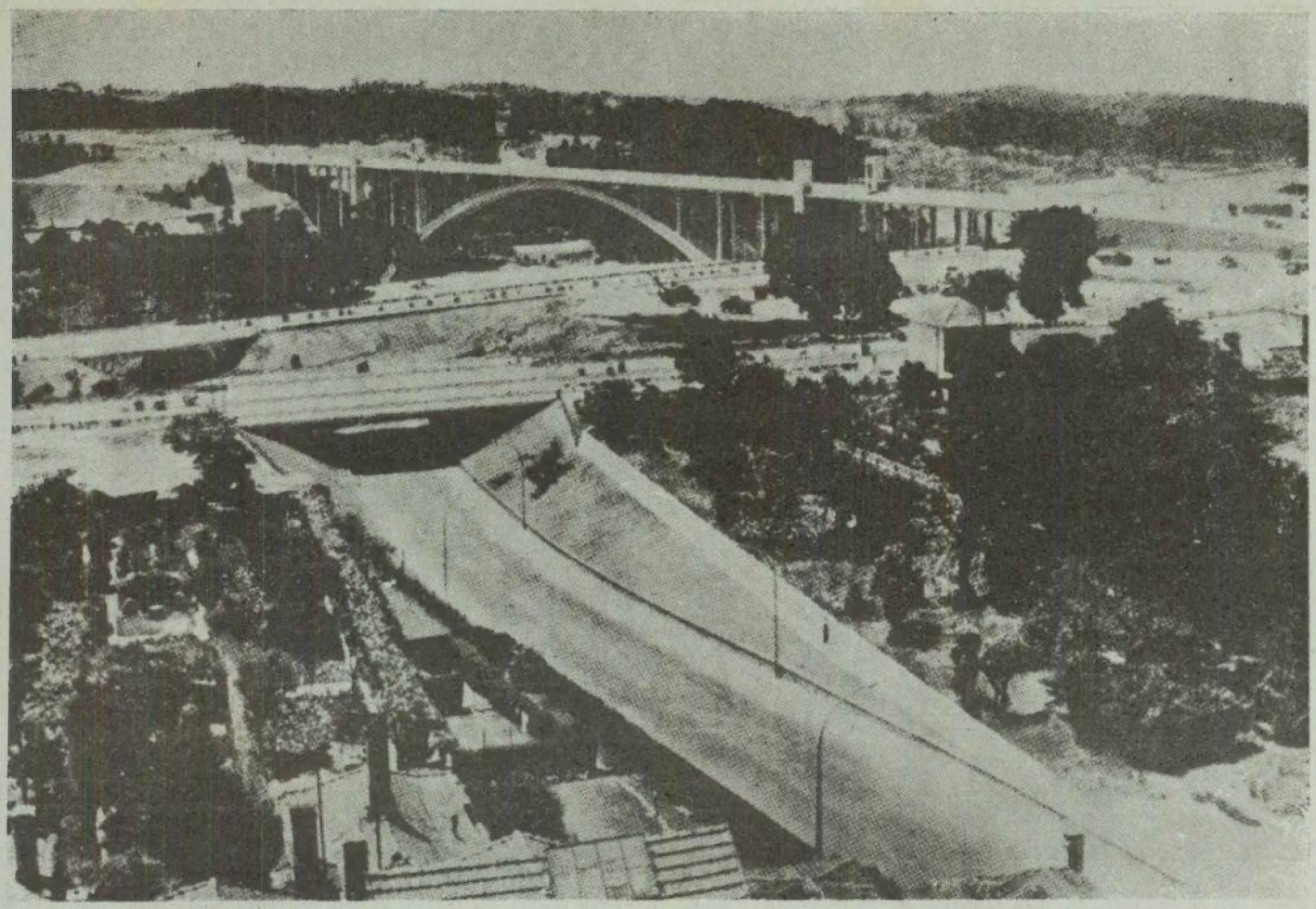
União Eléctrica Portuguesa . . . . . 2.ª da capa

V

Vasco Pessoa, Lda. XXXII
Von Roll V

W

Wild Portugal, Lda. XXIX
W. Schmidt XLI



Ponte da Arrábida — PORTO

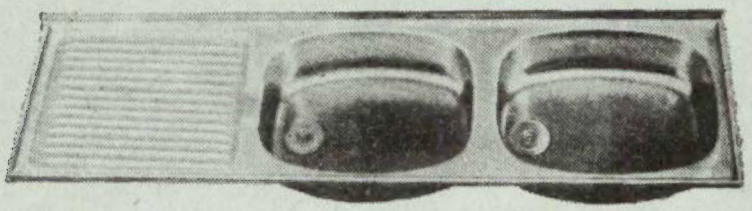
Vista parcial dos acessos da Ponte da Arrábida assentes sobre

ESTACAS FRANKI

FUNDAÇÕES FRANKI, L.DA

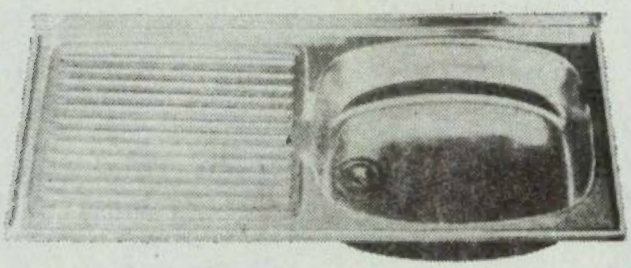
Rua Braamcamp, 13, 3.º — Lisboa — Tel. PPC 73 41 12 — End. Tel. FRANKI

LAVA-LOUÇAS EM AÇO INOXIDAVEL



Modernize os lares de Portugal, usando nas suas cozinhas Lava-Louças em AÇO INOXIDÁVEL. Concepção e execução da

FABRICA PORTUGAL



elegantes e higiénicos · duração ilimitada · revestidos de isolante especial · fornecidos com sifão de segurança · não partem a louça

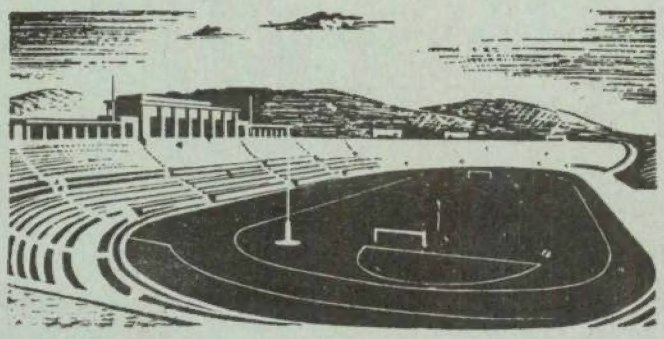
· 8 MODELOS STANDARD · OUTROS MODELOS FORA DE SÉRIE
· MODELOS ESPECIAIS PARA GRANDES INSTALAÇÕES
· IGUAIS AOS MELHORES ESTRANGEIROS

À VENDA NAS BOAS CASAS DA ESPECIALIDADE
E NOS SEUS SALÕES DE EXPOSIÇÃO E VENDA

PRAÇA DOS RESTAURADORES - RUA FEBO MONIZ

PIMENTEL & CASQUILHO, L.DA

QUASE 40 ANOS AO SERVIÇO DA ENGENHARIA PORTUGUESA



GRANDE SORTIDO DE INSTRUMENTOS DE PRECISÃO, CIENTÍFICOS E INDUSTRIAIS

RUA JARDIM DO REGEDOR, 24, 2.°
LISBOA
TELEF.: 32 43 14 — 32 42 48 ✦ TELEG.: TECNA

Bombas centrífugas «PACIFIC»

Construídas por

Batignolles - Chatillon

Especialmente destinadas para:

— Petróleos
— Indústrias químicas
— Construções navais
— Centrais eléctricas
— Alimentação de caldeiras
— Etc., etc.

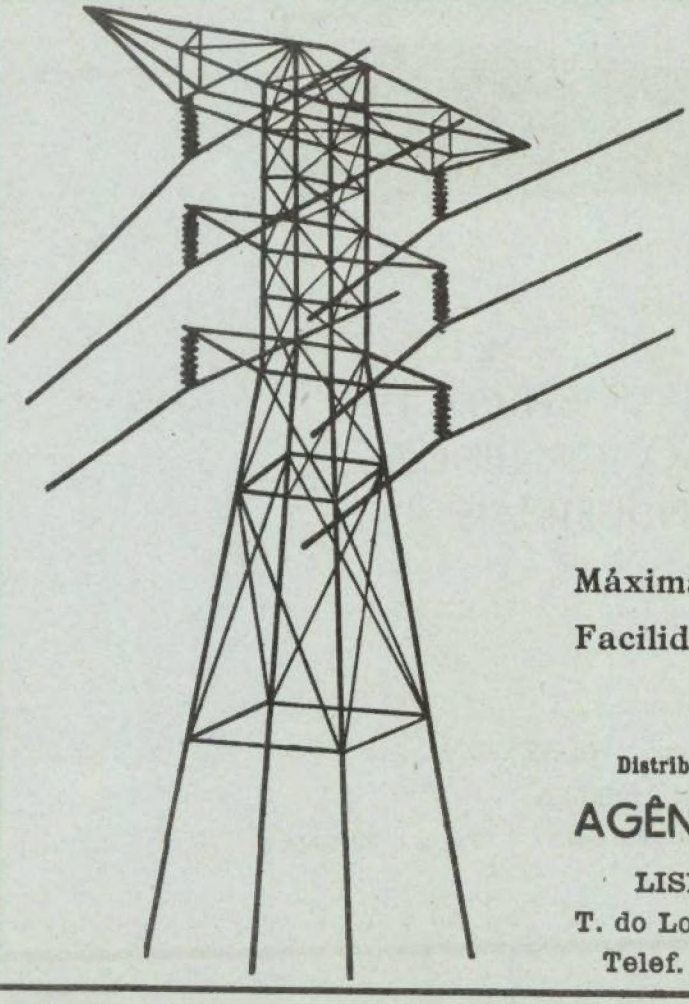
Sob as condições de funcionamento seguintes:

— Débitos: 1 m³/h a 10.000 m³/h
— Pressões: altas e baixas
— Temperaturas: −180° C + 500° C
— Líquidos: corrosivos ou não

Para estudos e orçamentos, consultar o representante em Portugal:

CIDEX — Comércio Internacional
e Representações Industriais, Lda.

Av. Casal Ribeiro, 46-2.°/Telef. 73 53 07/LISBOA 1



METALIZAÇÃO A FRIO

NEODON

NEODON + ZINCO =
NEODONZINKGRUND

Máxima protecção
Facilidade de aplicação

Distribuidores exclusivos:

AGÊNCIA COMERCIAL, L.DA

LISBOA
T. do Loureiro, 3
Telef. 4 90 54

ÉVORA
R. da República, 93
Telef. 2 33 63

Válvulas de cunha, para vapor
Placas de obturação articuladas sobre uma esfera. Estanqueidade permanente

1 Válvulas de passagem
Sede de estanqueidade e haste de aço inoxidável

2 Válvulas para matérias pastosas
Sem necessidade de conservação (sem prensas-estopa nem tampas de limpeza)

3 Válvulas de sede oblíqua
para ácidos. Liga cromo-níquel-molibdeno

4 Válvulas de membrana de borracha
Sem prensa-estopa

5 Válvulas de macho
Com elevada resistência aos ácidos

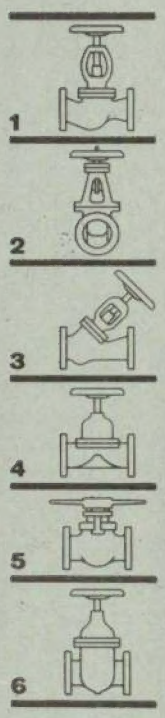
6 Válvula de cunha. Sem prensa-estopa

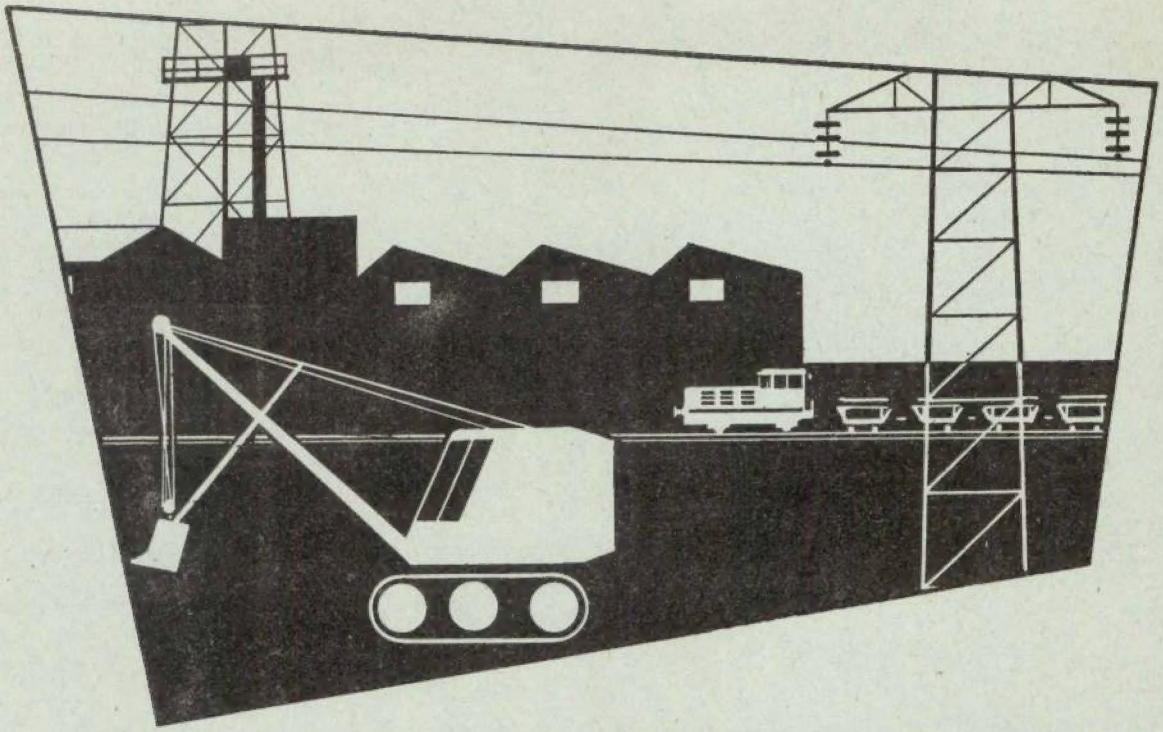
VON ROLL S.A.

à frente no progresso da construção de válvulas

Fábricas de Klus (Suiça)

Representantes em Portugal:
Socotel, Lda.
Rua Sá da Bandeira, 651-4°, Porto
Tel. 27013





MERCEDES-BENZ

MOTORES INDUSTRIAIS DIESEL

MOTORES PARA TODAS AS APLICAÇÕES INDUSTRIAIS
FAMOSOS EM TODO O MUNDO PELA SUA GRANDE ROBUSTÊS, ECONOMIA
DE CONSUMO E FACILIDADE DE MANUTENÇÃO
MODELOS DESDE 15 A 2.500 H. P.

EM ARMAZÉM:

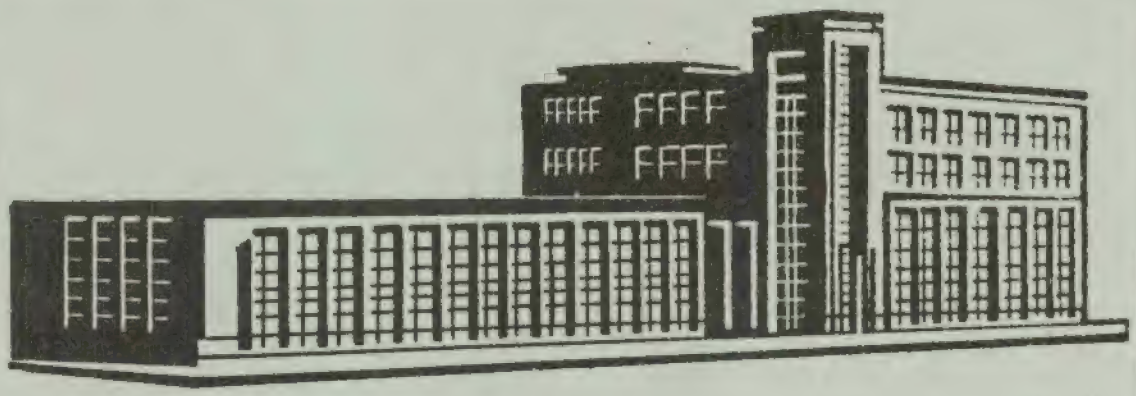
MODELO M B 841 B	25 H. P. — 1.000 R. P. M.
MODELO M 202 B	55 H. P. — 1.200 R. P. M.
MODELO M 203 B	90 H. P. — 1.200 R. P. M.
MODELO M 204 B	120 H. P. — 1.200 R. P. M.

OUTROS MODELOS PARA ENTREGA MUITO RÁPIDA

MOTORES A 4 TEMPOS · ARREFECIMENTO POR ÁGUA
ARRANQUE A AR COMPRIMIDO OU ELÉCTRICO

REPRESENTANTES C. SANTOS LDA. — DIVISÃO MARÍTIMA E INDUSTRIAL

29, AV. DA LIBERDADE, 41 — LISBOA
160, R. DE S.TA CATARINA, 168 — PORTO



Standard Electrica S.A.R.L.

Associada da

INTERNATIONAL TELEPHONE AND TELEGRAPH CORPORATION

DE NOVA YORK

TELECOMUNICAÇÕES

ELECTRÓNICA

AV. DA INDIA — LISBOA

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 66 61 86 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

CAVAN

SOCIEDADE PORTUGUESA

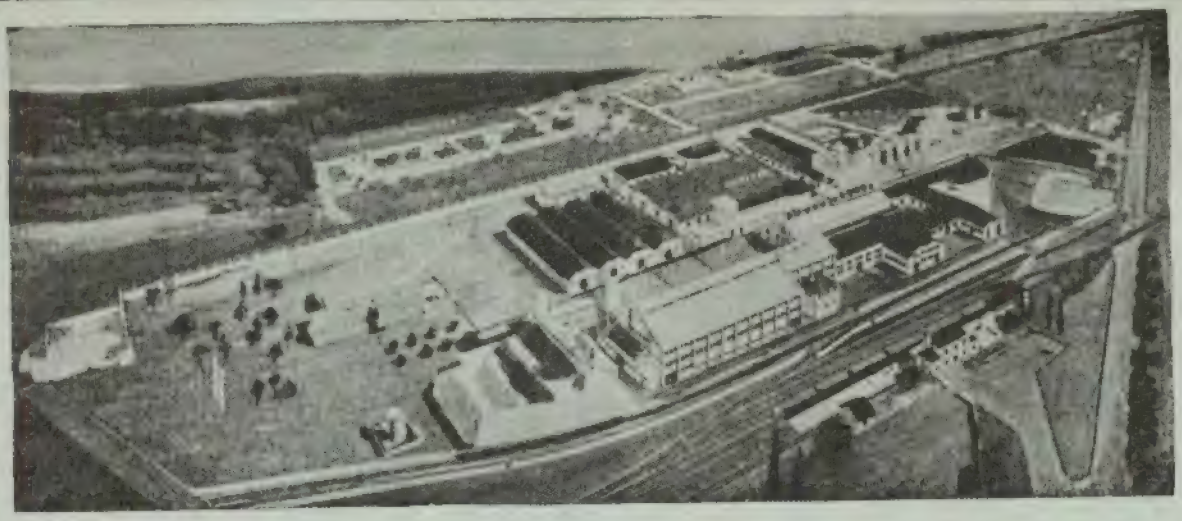
✸

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS

COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

✸

RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A
TELEF. 47812-50129
LISBOA



COMPANHIA PORTUGUESA DE FORNOS ELÉCTRICOS

PRODUTORA DE

FERRO GUSA

FERRO LIGAS

FERRO-MANGANÊS

SÍLICO-MANGANÊS

FERRO-SILÍCIOS

15 % - 25 % - 45 % - 75 % - 90 %

CARBONETO DE CÁLCIO

CIANAMIDA CÁLCICA

PASTA PARA ELÉCTRODOS

E EM MONTAGEM

GRAFITE

FÁBRICAS
CANAS DE SENHORIM
Telefone 6 72 22

SEDE
Largo de S. Carlos, 4 2.º — LISBOA
Telefones 32 53 43 - 3 55 56 - 36 89 89

Celulite

ISOLAMENTO
TÉRMICO DAS
CONSTRUÇÕES

PAVIMENTOS
*
TECTOS
*
PAREDES
*
CÂMARAS
FRIGORÍFICAS
*
ISOLAMENTOS
INDUSTRIAIS

Terraços e pavimentos isolados com CELULITE no edifício da Comp.ª de Seguros Fidelidade — P. das Águas Livres — Lisboa

SETH, LDA. • RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.° • TEL. 73 01 56 — LISBOA

Para impermeabilizar terraços,
paredes, fundações, etc.

COLAGEM DE
TACOS DE MADEIRA

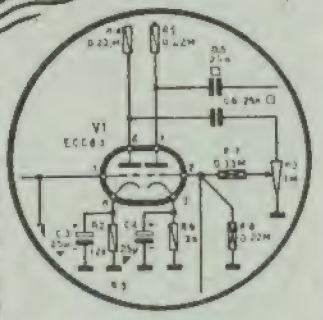
TELEF. 73 0156 TELEG. EPALDA — LISBOA

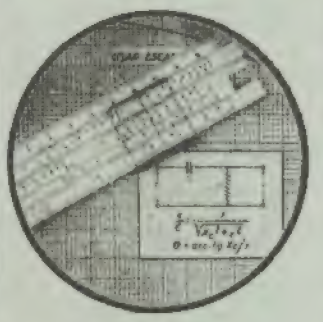
EMPREZA DE PRODUCTOS ASFÁLTICOS
IMPERMEABILISADOR
IMEPA
RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.º-LISBOA

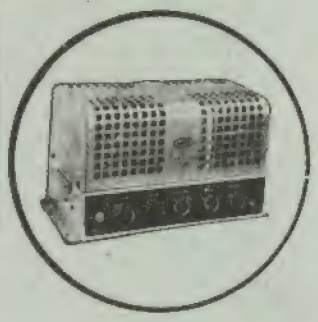
FÁBRICA EM SACAVÉM

EQUIPAMENTO DE AMPLIFICAÇÃO DE GOM

BEM CONCEBID
CALCULAD
CONSTRUID







LESA

A grande marca italiana

Representantes em Portugal

TELECTRA

EMPRESA TÉCNICA DE EQUIPAMENTOS ELÉCTRICOS, S. A. R. L.

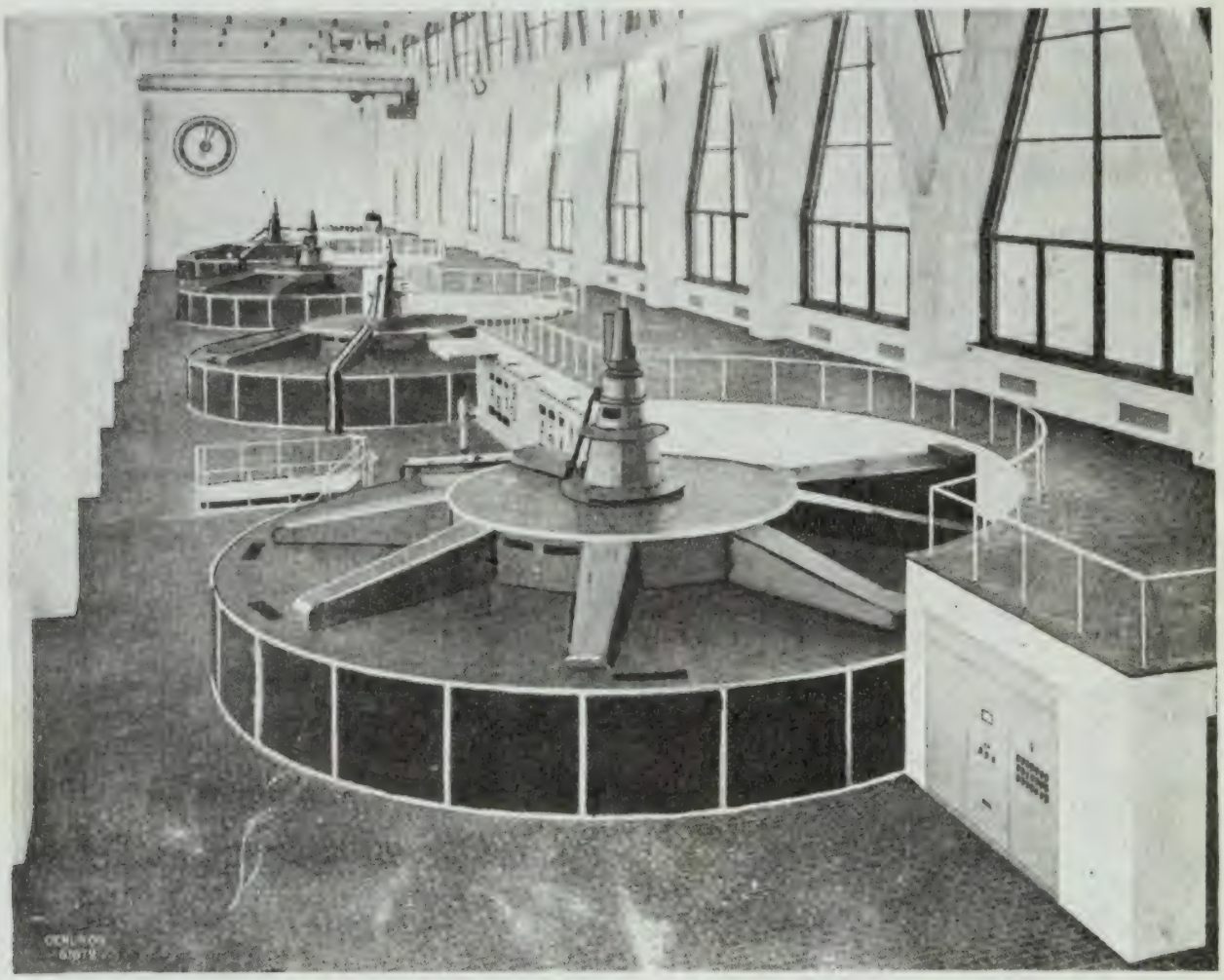
Rua Rodrigo da Fonseca, 103, r/c
LISBOA — Tel. 68 60 72

Rua Sá da Bandeira, 766-1.º E.
Tel. 2 48 18 — PORTO

Ateliers de Construction Oerlikon—Zurich 50

Alternadores accionados por turbinas hidráulicas, para todas as potências e condições de exploração, pequenas e grandes velocidades

Central hidroeléctrica de Birsfelden (Suíça), sobre o Reno. Alternadores de 26.000 kVA, cada um, 6.600 V, 68 rot/min, 50 Hz. Diâmetro: 14 metros



Representante para Portugal e Ultramar: **Sociedade Michaëlis de Vasconcellos, Lda.**

PORTO — P. da Liberdade, 114 LISBOA — Av. Marquês de Tomar, 94

TÉCNICA

CORPO REDACTORIAL: J. M. VIEGAS GONÇALVES, J. F. GOMES DE PINA, A. M. L. ESTEVES BRINCA

Ano XXXVIII — N.º 331 Outubro de 1963

C. D. U. 378.962 (061.3)

CONGRESSO DO ENSINO DE ENGENHARIA

CONCLUSÕES GERAIS

Tirar conclusões, bem fundamentadas e que correspondessem à opinião da maioria dos Congressistas, das comunicações apresentadas e das intervenções registadas durante as sessões de trabalho, revelou-se tarefa ingente. É possível que, com mais vagar, se pudesse vir a formular um conjunto de conclusões que exprimissem, com mais felicidade, o pensar geral, todavia, sempre à custa de um número bastante elevado de conclusões e de dilação grave da sua apresentação a público, que já não é pequena.

Nestas circunstâncias, optou-se por extrair do conjunto das comunicações e, sobretudo, das apreciações e discussões que fomentaram, um número limitado de conclusões de carácter geral que exprimissem os anseios manifestados e as directrizes apontadas, em vez de conclusões mais pormenorizadas mas, certamente, mais controversas. Não é, aliás, de estranhar que tal suceda, uma vez que os problemas do ensino têm sido pouco estudados e discutidos entre nós, onde se vive muito da tradição, da cópia e do empirismo em tal assunto.

A Comissão Organizadora do Congresso elaborou um plano de trabalhos, bastante detalhado, com 16 temas propostos para estudo, julgando que a indicação de temas objectivos e limitados, facilitava a apresentação de comunicações sobre assunto tão complexo como o ensino superior de engenharia. O que se verificou na prática mostrou quão inadequado tinha sido aquele modo de proceder — raras foram as comunicações que não focaram vários temas de estudo propostos — embora não se veja como teria sido possível programar as sessões de trabalho de outro modo.

Este mal de origem viu-se ainda agravado pelo facto de a discussão ter posto em causa não sòmente o ensino superior de engenharia, mas todo o sistema de ensino. A complexidade do problema ficou bem expressa nas implicações que envolveu e a que não se fugiu, nem seria possível fazê-lo, durante os debates que o Congresso provocou.

Como síntese de tudo o se que passou durante o Congresso, pode afirmar-se *ser dever imperioso promover urgentemente uma reforma profunda do ensino em todos os escalões, com base em estudo sério, que analise não só as necessidades do País mas também as circunstâncias do ambiente,* pois que o problema do ensino é, no fundo, um problema humano.

O Congresso do Ensino de Engenharia formula as seguintes condições:

I — É de importância vital e muito urgente a remodelação da actual estrutura do ensino da engenharia, por não satisfazer às necessidades da vida nacional, implicando tal remodelação a reorganização do ensino em todos os seus aspectos, nomeadamente:

a) elevação do nível de preparação geral do País por meio da extensão do período de escolaridade gratuita e obrigatória, com um imediato alargamento para 6 anos numa primeira fase;

b) preparação pré-universitária dos alunos de engenharia com uma índole essencialmente formativa e dirigida às cadeiras de base no que respeita à formação técnica dos futuros engenheiros (Matemática, Física, Química e Desenho), mas ainda em relação à formação integral de futuros responsáveis (Línguas, Filosofia, História, Artes, Geografia, etc.);

c) instituição de graus académicos com um primeiro grau de duração não superior a 5 anos;

d) reestruturação do ensino em harmonia com a alínea anterior facultando-se aos actuais diplomados pelos Institutos Industriais possibilidades de acesso à categoria de engenheiros;

e) realização nas universidades, nomeadamente nas escolas superiores de engenharia, de trabalhos de investigação, nos quais participem professores, assistentes e alunos;

f) funcionamento de cursos pós-universitários para os engenheiros, os quais, permitam manter actualizados os conhecimentos destes, tanto no que respeita às matérias aplicadas, como às ciências de base e na efectivação dos quais participem activamente as escolas e entidades ligadas à engenharia;

g) activa participação da indústria na resolução dos problemas do ensino, inclusivamente no que se refere aos meios materiais.

II — É indispensável a criação de organismo que defina, em função dos parâmetros económicos e sociais do País, qual a qualificação e a quantidade de mão-de-obra, em todos os escalões da actividades profissional, com vista a:

a) instituição, à escala nacional, de uma política única relativamente ao desenvolvimento económico, ao ensino e à investigação;

b) estabelecimento dos escalões de nível do ensino para as diferentes actividades profissionais;

c) alargamento do âmbito do ensino de modo a cobrir eficazmente, de acordo com as necessidades do País, um maior número de ramos especializados, nomeadamente nos cursos de engenharia.

III — É fundamental que o acesso aos níveis superiores do ensino seja facultado ao maior número possível de indivíduos, para o que se torna necessário:

a) adopção de medidas de carácter económico — nomeadamente a concessão de bolsas e subsídios — que tornem possível o prosseguimento dos estudos a todos os portugueses que, em qualquer ponto do País, para tal se revelem aptos;

b) criação de um sistema eficiente e generalizado de orientação profissional que permita fazer uma selecção adequada;

c) instituição de múltiplas modalidades de ingresso nos diversos escalões do ensino, de modo a estimular em todos os portugueses o gosto pelo estudo e pelo progresso intelectual e profissional.

IV — Considera-se primordial, dentro do problema geral da rentabilidade do ensino, a eficiência dos meios humanos que para ele concorrem, para o que se torna necessário:

a) constituição de quadros docentes suficientemente amplos com elevados níveis científico, pedagógico e cultural;

b) estudo das melhores condições de recrutamento e de permanente actualização do corpo docente;

c) integração dos professores e dos alunos na política dos objectivos da Escola, considerando-se uns e outros como profisssionais nas respectivas actividades;

d) existência, em cada escola, como elemento de interesse fundamental no ensino, de uma associação de estudantes que, devendo actuar em íntima colaboração com o corpo docente, contribua para o equacionamento dos problemas pedagógicos e para uma mais perfeita e completa formação dos futuros engenheiros;

e) apoio às demais organizações circum e para-escolares que, de algum modo, concorram para os fins enunciados na alínea anterior;

f) criação de condições que conduzam à participação dos engenheiros nas actividades das escolas.

V—Torna-se imperioso encarar e com realismo resolver o problema das verbas necessárias para apetrechar as escolas de engenharia, considerando:

a) a necessidade do equipamento laboratorial de custo elevado, para ministrar um ensino actualizado que acompanhe os rápidos progressos da Ciência e da Técnica;

b) a elevada preparação científica e técnica exigida para a utilicação desse equipamento;

c) a necessidade de um quadro de pessoal auxiliar (preparadores, mecânicos, electricistas, etc.).

VI — É necessário renovar a estrutura de funcionamento das escolas de engenharia, mediante:

a) modificação da legislação vigente de modo a conferir-lhes mais autonomia administrativa e pedagógica, dentro de uma orgânica geral a respeitar, em especial através da criação de órgãos consultivos nos quais estejam representadas as entidades públicas e privadas interessadas no ensino da engenharia;

b) orientação do ensino com um carácter essencialmente formativo;

c) planeamento e coordenação dos programas e sua actualização permanente, em especial no que se refere à interdependência das cadeiras de preparação científica e da especialidade:

d) estabelecimento de um quadro equilibrado de professores repartido desde os que se têm de dedicar às escolas em regime de *full time*, até àqueles que apenas vão ensinar matérias da sua especialidade, com a correspondente diversidade de remunerações;

e) apreciação do aproveitamento dos estudantes, com base no trabalho comum de professores e alunos.

VII — Considera-se da maior importância a continuação dos trabalhos iniciados por este Congresso, através da criação de uma comissão permanente com a função de manter o debate sobre os problemas relativos ao ensino de engenharia e coordenar os estudos que, neste domínio, venham a ser empreendidos. Esta incumbência é, provisòriamente, atribuída à Secção de Antigos Alunos da Associação dos Estudantes do Intituto Superior Técnico, até à criação de um organismo que englobe representantes do ensino, dos diplomados e das entidades ligadas à engenharia.

Lisboa, 26 de Julho de 1963

A COMISSÃO REDACTORA

RELATÓRIO DA COMISSÃO ORGANIZADORA

Ao chegar, pràticamente, ao fim da tarefa que lhe tinha sido atribuída, a Comissão Organizadora julga conveniente tornar público um pequeno resumo das suas actividades.

A oportunidade de um congresso do ensino superior de engenharia foi verificada pela Comissão Organizadora das Comemorações do Cinquentenário do Instituto Superior Técnico que se propôs levar a efeito tal realização. Para isso escolheu uma comissão de três dos seus membros (José Maria Mercier Marques, Paulo de Barros e Décio Thadeu) para elaborarem o respectivo programa e, uma vez aprovado este, nomeou a Comissão Organizadora e a Comissão Executiva encarregadas de lhe dar realidade.

A partir desse momento, toda a responsabilidade dos trabalhos ficou entregue àquelas Comissões, cuja constituição é conhecida.

Deve, no entanto, esclarecer-se que a Comissão Organizadora nunca ficou completa, dada a impossibilidade que se verificou em nomear um delegado dos alunos da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, mau grado as tentativas reiteradas que se fizeram, quer por intermédio do aluno José Fernando Pinharanda, delegado da AEIST, quer por intermédio dos delegados do corpo docente daquela Faculdade, as quais ficaram sem resposta.

Só após a realização do Congresso, foi possível agregar à Comissão Redactora das Conclusões Finais um aluno da Faculdade de Engenharia, membro do Congresso, — Luís Vaz Pinto.

Ainda durante o período de organização, verificou-se a substituição do Prof. Manuel Corrêa de Barros pelo Prof. Augusto Farinas de Almeida, em consequência de o primeiro ter sido nomeado Reitor da Universidade do Porto.

A realização do Congresso, integrado no programa das Comemorações do Cinquentenário do Instituto Superior Técnico revelou-se, desde muito cedo, impraticável.

Assim, obtido o patrocínio do Ministério da Educação Nacional, dado pelo respectivo Ministro, Senhor Prof. Francisco de Paula Leite Pinto, e renovado, posteriormente, pelo Senhor Prof. Manuel Lopes de Almeida, procurou a Comissão Organizadora assegurar os fundos indispensáveis a uma organização, que embora, modesta, garantisse o mínimo de decência

As diligências efectuadas nesse sentido, junto da Fundação Calouste Gulbenkian e das empresas industriais, foram laboriosas e longas; paralelamente, surgiram circunstâncias adversas na vida nacional que obrigaram a sucessivos adiamentos, só se podendo verificar a realização do Congresso na última semana de Novembro de 1962.

Posta, por várias vezes, essa hipótese da não realização do Congresso, devido às circunstâncias adversas e imprevistas surgidas, foram sempre, a Comissão Organizadora e a Comissão Executiva, de parecer unânime que, não obstante todos os adiamentos tornados inevitáveis, a realização do Congresso se devia manter.

Os adiamentos sucessivos se, por um lado, justificaram até certo ponto alguma descrença manifestada na organização do Congresso, permitiram por outro lado, obter a colaboração efectiva da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto que, desde início, a Comissão Organizadora das Comemorações do Cinquentenário do Instituto Superior Técnico julgara conveniente.

Chegados a bom termo os trabalhos do Congresso e publicados os relatos das sessões de trabalho, as conclusões das secções e as conclusões finais, a Comissão Organizadora considera terminada a sua tarefa e tem a convicção de que a persistência posta na execução do Congresso do Ensino de Engenharia foi compensada pelos resultados já obtidos.

Estes não foram excepcionais; no entanto, provaram o grande interesse de os assuntos do ensino serem largamente debatidos e, se as conclusões não têm força executiva, não será possível desconhecer, no futuro, as directrizes mais importantes apontadas.

A Comissão Organizadora pensa que a efectivação do Congresso constitui um serviço importante prestado, quer ao País, quer às escolas de Engenharia.

Muito do mérito da realização do Congresso do Ensino de Engenharia não pertence à Comissão

MAGUE

CONSTRUÇÕES METALO-MECÂNICAS MAGUE, L.DA

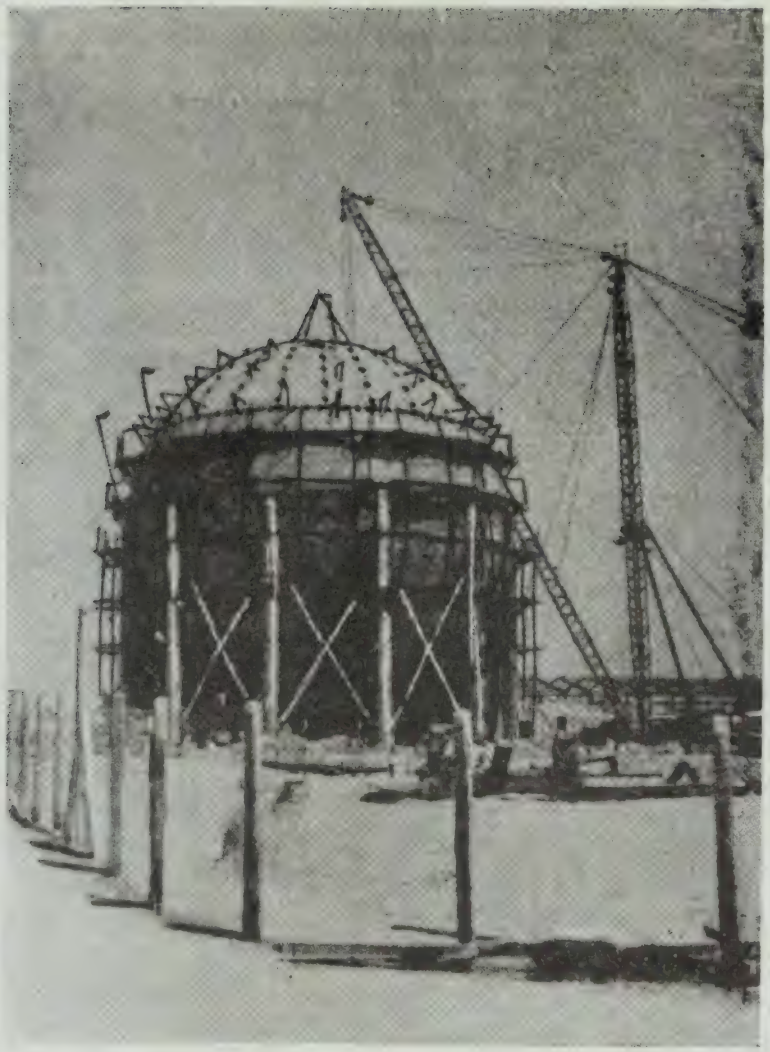
(S. E. MONIZ DA MAIA & VAZ GUEDES, L.DA)

Alverca — Portugal

Guindaste eléctrico de 25 t/18 m em funcionamento no Estaleiro da NAVALIS c/ projecto e fabrico mecânico «MAGUE»

PROJECTO E FABRICO DE

PONTES ROLANTES
GUINDASTES
GRUAS, DERRICKS E GUINCHOS
APARELHOS DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS
CONSTRUÇÕES METÁLICAS PESADAS



ESFERA

PARA

ARMAZENAGEM

DE

AMONÍACO

AÇOS VAZADOS • FERROS FUNDIDOS
MECÂNICA MÉDIA E PESADA
CONSTRUÇÕES METÁLICAS

comportas
turbinas
condutas forçadas
reservatórios sob pressão
permutadores de calor

REDUTORES DE VELOCIDADE

DIVISÃO METALO-MECÂNICA

COMPANHIA UNIÃO FABRIL

AV. 24 DE JULHO, 170 — LISBOA 2 — TELEFONES 67 04 21 E 67 20 61 — TELEGRAMAS: METALOFABRIL

Organizadora e à Comissão Executiva, embora estas tenham procurado polarizar em si todas as contribuições e boas vontades.

Em primeiro lugar, deve destacar-se o importante subsídio concedido pela Fundação Calouste Gulbenkian que permitiu dar início público aos trabalhos de organização e sem o qual, é quase certo, o Congresso não se teria efectuado.

Infelizmente tem de se concluir que o Congreso não encontrou grande eco entre a Indústria Nacional. Com efeito as diligências realizadas para obter algum apoio material por parte daquela conduziram, na maioria dos casos, a respostas negativas (1).

O número dos Congressistas, cerca de seiscentos e cinquenta, considera-se muito satisfatório, atendendo a que era a primeira vez que se realizava uma iniciativa deste género no País, facto que justificava alguma descrença e, sobretudo, expectativa.

Não foi possível garantir um serviço permanente de secretaria (os recursos de que se dispunha não o permitiam); todavia, conseguiu-se assegurar a eficiência indispensável, quer na organização geral do Congresso, quer na realização das sessões, que se ficou a dever à dedicação e à competência do pessoal da Contabilidade e da Secretaria, bem como do Chefe do Pessoal Menor e Contínuos do Instituto Superior Técnico.

O mérito do Congresso deve-se, em primeiro lugar, aos Congressistas que apresentaram comunicações, tanto mais de agradecer quanto pouco numerosos, e sem cuja contribuição o Congresso não teria realização possível.

Ao trabalho dos Relatores (realizado, aliás, em precárias circunstâncias devido ao tempo extremamente curto que a Comissão Organizadora lhes pôde conceder) ficaram a dever-se as sínteses que serviram de base ao funcionamento do Congresso e a redacção das conclusões das Secções.

Os Presidentes e os Secretários das mesas asseguraram a efectivação das sessões com elevada correcção e competência.

Grupo numeroso de Congressistas participou activamente nos debates, permitindo dar-lhes maior generalidade e manter vivo o interesse pelos trabalhos, contribuindo decisivamente para lhes impor nível elevado.

Finalmente, a Comissão Organização contou com a colaboração valiosa dos Congressistas Eng. Manuel Rocha, Ag.-Técnico de Eng.ª Henrique Ramos Antunes, Aluno da F. E. Luís Vaz Pinto e Aluno do I. S. T. Júlio Freire de Andrade para a redacção das conclusões finais.

A realização do Congresso do Ensino de Engenharia foi tarefa muito espinhosa, sob todos os aspectos, que só foi possível levar a bom termo mercê da valiosa colaboração recebida e que se registou com agrado. Assim, a Comissão Organizadora quer manifestar a todos sincero reconhecimento e tem o dever de lhes endossar a maior parte do sucesso alcançado pelo Congresso.

Lisboa, 27 de Julho de 1963

A COMISSÃO ORGANIZADORA

---

(1) *N. R.* — Os nomes das dez empresas que contribuiram para a realização do Congresso constam das primeiras páginas da publicação editada pela Comissão Organizadora.

C. D. U. 621.311.5/91

Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional

— Elementos extraídos das estatísticas mensais do Repartidor Nacional de Cargas (R. N. C.)

NOTA: *As produções e os consumos das empresas do R. N. C. representam cerca de 94 % dos totais do País.*

I — Breve nota mensal

No aspecto hidrológico, o mês de Julho apresentou-se, no conjunto, muito abaixo da média.

II — Elementos gerais (GWh)

a) Mensais

	1962	1963	Variação %
Produção hidráulica (P_h)	304,7	307,8	+ 1
Produção térmica (P_t)	2,1	18,4	—
Produção total (P_T)	306,8	326,2	+ 6
Exportações (Ex)	0,0	0,0	0
Importações (I)	0,0	0,0	0
Produção para consumos não perman. (P_{cnp})	69,3	61,5	— 11
Produção para consumos permanentes (P_{cp}) (1)	237,5	264,7	+11,5 (2)
Coeficiente de hidraulicidade	0,86	0,68	—

b) Acumulados desde 1 de Janeiro

	1962	1963	Variação %
Produção hidráulica (P_h)	2129,8	2357,7	+ 11
Produção térmica (P_t)	8,2	37,3	+355
Produção total (P_T)	2138,0	2395,0	+ 12
Exportações (Ex)	0,0	32,8	—
Importações (I)	0,0	0,1	—
Produção para consumo não perman. (P_{cnp})	456,3	499,9	+ 10
Produção para consumos permanentes (P_{cp}) (1)	1681,7	1892,4	+10,7 (2)
Coeficiente de hidraulicidade	1,13	1,44	—

NOTAS:

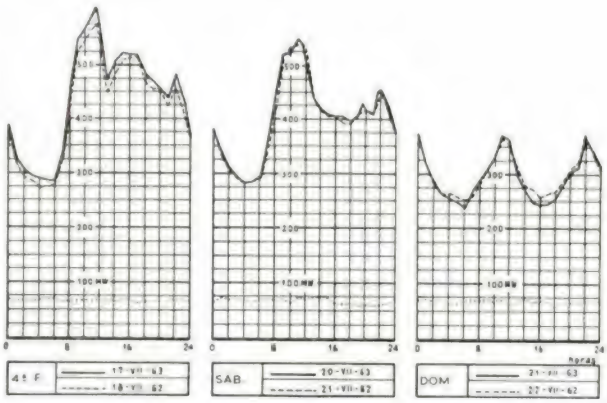
(1) A produção para consumos permanentes (P_{CP}) é determinada pela seguinte expressão: $P_{CP} = P_T - P_{cnp} + I - Ex$

(2) O aumento percentual de produção para consumos permanentes, tendo em conta a incidência dos domingos e dias especiais, é respectivamente de 10,6 % e 10,3 %.

III — Diagramas de carga dos dias característicos

			4.ª feira: 1962	4.ª feira: 1963
Produção hidráulica		(P_h) MWh	10430	10845
Produção térmica		(P_t) MWh	0	0
Produção total		(P_T) MWh	10430	10845
Trocas com Espanha	Export.	(Ex) MWh	0	0
	Import.	(I) MWh	0	0
TOTAL		$P_T + (I-Ex)$ MWh	10430	10845
Prod. para cons. perm.		(P_{cp}) MWh	8452	9342
Prod. para cons. não perm.		(P_{cnp}) MWh	1978	1503
Características dos diagramas	$P_T + (I-Ex)$	Potência máx. MW	575,5	608
		Potência mín. MW	270,5	284
		Utiliz. da ponta horas	18,1	17,8
		Factor de carga	0,75	0,74
	P_{cp}	Potência máx. MW	489	540
		Potência mín. MW	189	215
		Utiliz. da ponta horas	17,3	17,3
		Factor de carga	0,72	0,72

JULHO



IV — Energia armazenada nas principais albufeiras

Albufeiras:	No fim do mês GWh	No fim do mês % (1)
Paradela	138,9	62,4
Venda Nova	79,6	62,2
Salamonde	22,8	82,6
Caniçada	21,4	64,7
Cabril	286,9	81,6
Castelo do Bode	103,3	63,4
Guilhofrei	7,4	89,2
Lagoa Comprida	27,1 (2)	81,0
Santa Luzia	51,4	83,4
Pracana	7,9	61,2
Póvoa	12,9 (3)	98,1
Total	759,6	72,8

Notas:

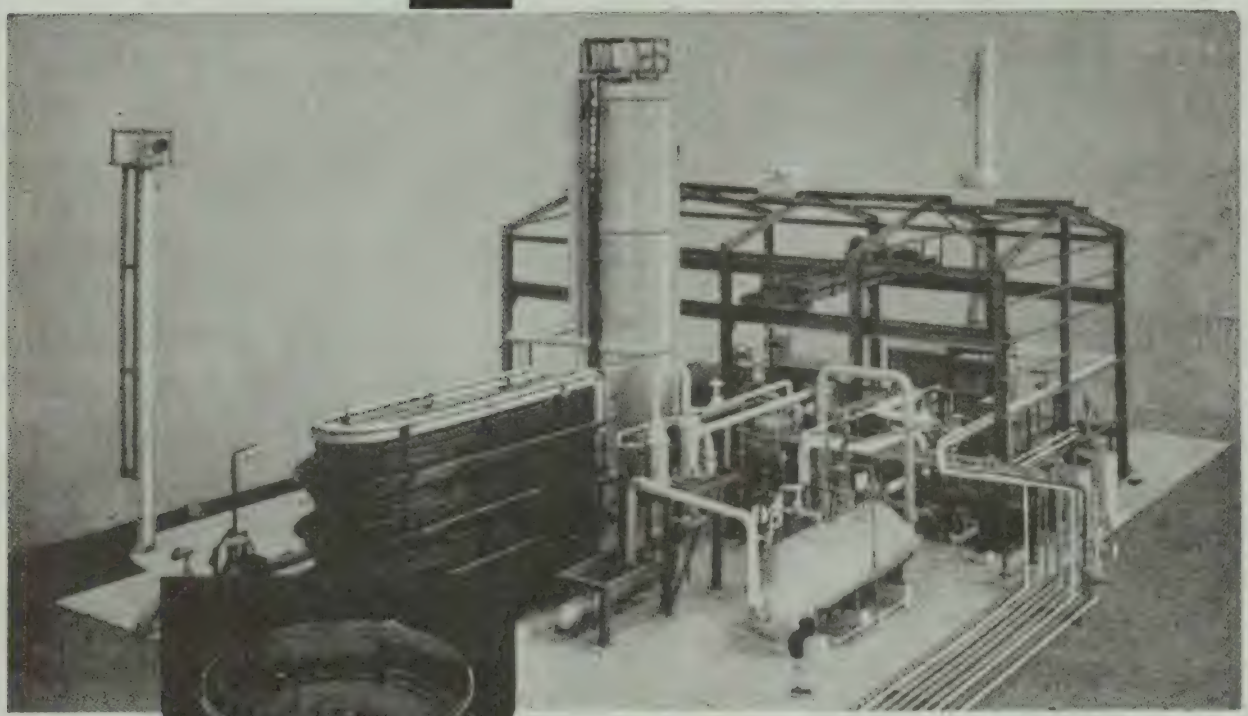
(1) Coeficiente de enchimento em energia das albufeiras.

(2) Inclui 3,3 GWh armazenados em Vale do Rossim no fim do mês.

(3) Inclui 2,7 GWh armazenados no açude do Poio no fim do mês.

CENTRO DE PROJECTOS

COLOCA A SUA EXPERIÊNCIA AO SERVIÇO DA INDÚSTRIA NACIONAL



MODELO DE INSTALAÇÃO EXECUTADO A PEDIDO DO CLIENTE

MODELO DE TANQUE DE TECTO FLUTUANTE

CONSTRUÇÃO DE MODELOS REDUZIDOS

O CENTRO DE PROJECTOS CONSTRÓI MODELOS DE INSTALAÇÕES E EQUIPAMENTOS, QUER PARA REALIZAÇÕES A SEU CARGO QUER A PEDIDO DE CLIENTES COM BASE EM DESENHOS QUE LHE SEJAM FORNECIDOS.

OS MODELOS REDUZIDOS

- FACILITAM O ESTUDO DA INSTALAÇÃO
- TORNAM MAIS FÁCIL E RÁPIDA A SUA MONTAGEM
- POSSIBILITAM A INSTRUÇÃO DO PESSOAL ENCARREGADO DA CONDUÇÃO DA FÁBRICA. SÃO DE GRANDE UTILIDADE NA PLANIFICAÇÃO DA MONTAGEM DA INSTALAÇÃO

EXPONHA OS SEUS PROBLEMAS E DIRIJA AS SUAS CONSULTAS A **CENTRO DE PROJECTOS CUF** AV. 24 DE JULHO, 170 TELEF. 67 20 61 LISBOA - PORTUGAL TELEG. PROFABRIL (P-)

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS

SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEF.: 93
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

FELTROS, FILTROS E TECIDOS INDUSTRIAIS PARA TODOS OS FINS:

EM PEÇAS, PANOS, MANGAS OU SACOS,
DE QUALQUER FIBRA

PASTA PARA PAPEL
PAPEL
FIBROCIMENTO
CURTUMES
FIAÇÕES DE ALGODÃO
LINHAS
INDÚSTRIAS QUÍMICAS

TECELAGENS
ACABAMENTOS
TINTURARIAS
LAVANDARIAS
ESTAMPARIAS
FILTROS
DESPOEIRAGEM

FLUIDO E MASTIC

IMPERMEABILIZAÇÕES

TORNA TUDO ESTANQUE

Impermeabilização e vedação perfeita de:

Terraços, Empenas, Algerozes, Clarabóias,
Paredes húmidas, Coberturas, Fendas,
Juntas de dilatação, etc., etc.

Fácil aplicação — Elasticidade excepcional
Não endurece nem apodrece

ROOFATEX **À base de borracha + alumínio**

Reforça a acção impermeabilizante do «Rubio», dando às construções um aspecto agradável — Protege todos os materiais contra a humidade, a ferrugem e a corrosão

RUBIO E ROOFATEX dois produtos que se completam

Representante exclusivo: Orlando Fernandes

Rua Palmira, 46-A-B-C — LISBOA-1 — Telefs. 83 01 63 - 84 26 39 — End. teleg. «ORFER»

C. D. U. 534.111

Tratamento matemático dos movimentos vibratórios de características lineares

PELO ENG.º MEC. (I. S. T.) JORGE NEVES DA SILVA
(Assistente no I. S. T. — Bolseiro do I. A. C.

0. INTRODUÇÃO

Neste trabalho pretendemos apresentar as soluções dos modelos matemáticos construídos a partir dos modelos físicos idealizados de sistemas vibratórios reais. É corrente na solução destes modelos apresentar soluções e verificá-las, introduzindo coeficientes que se definirão na substituição. Como veremos, é possível deduzir as soluções integrando com aproximações sucessivas e determinar imediatamente os coeficientes com toda a generalidade.

1. SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE

1.1. VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA OU NÃO

1.1.1. *Modelo matemático*

Consideram-se aqui os sistemas constituídos por uma massa sujeita a um movimento simples linear, actuada por uma ou mais molas de qualquer tipo, mas de característica linear, dissipando ou não energia em atritos de carácter viscoso (*), e livre de quaisquer acções exteriores. Poderemos substituir todas as molas por uma equivalente de característica k, e os atritos por um amortecedor linear equivalente e de característica R. O modelo físico resultante será, fig. 1.1 a ou fig. 1.1 b.

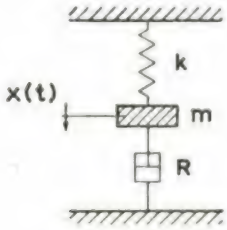


Fig. 1.1 a

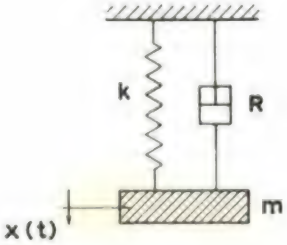


Fig. 1.1 b

o modelo matemático correspondente (**) será

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + k x = 0$$

ou

$$\ddot{x} + \frac{R}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

(*) Entende-se por viscoso um atrito em que a força resistente varia linearmente com a velocidade.
(**) Ver, por exemplo, A. Portela — Máquinas Alternativas I, 2.º Livro. Ed. A. E. I. S. T.

Usando a notação corrente, $\delta = \frac{R}{2\,m}$ e $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, respectivamente factor de amortecimento e frequência própria do sistema não amortecido, será

$$\ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0 \tag{1}$$

No caso particular do movimento não amortecido, $R = 0$ e

$$\ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0 \tag{2}$$

1.1.2. *Integração da equação diferencial* $\ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$

Fazendo

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ \dot{x} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{x} &= \dot{x}_2 = -2\,\delta\,\dot{x} - \omega_0^2\,x \\ &= -2\,\delta\,x_2 - \omega_0^2\,x_1 \end{aligned}$$

a equação matricial

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\,\delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ou, usando uma notação breve,

$$D\,X = \alpha\,X \tag{3}$$

representa as expressões acima consideradas.

A matriz quadrada α tal como se apresenta é de difícil tratamento nas operações que se vão seguir. Convém efectuar uma mudança de coordenadas orientando os eixos segundo os vectores próprios de α:

$$T^{-1}\,D\,X = T^{-1}\,\alpha\,T\,T^{-1}\,X = \Lambda\,T^{-1}\,X \tag{4}$$

Determinação da matriz diagonal Λ:

$$\det\,[\alpha - \Lambda\,I] = 0 \tag{5}$$

$$\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\,\delta - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

ou

$$\lambda\,[2\,\delta + \lambda] + \omega_0^2 = 0$$

equação cujas soluções são

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\delta + i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta + i\,\omega \\ \lambda_2 = -\delta - i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta - i\,\omega \end{cases} \tag{6}$$

usando a notação usual, em que ω representa a frequência própria do sistema amortecido.

Teremos então

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta + i\,\omega & 0 \\ 0 & -\delta - i\,\omega \end{bmatrix} \tag{7}$$

Obtém-se a matriz de transformação do seguinte modo:

$$\begin{aligned} T^{-1}\,\alpha\,T &= \Lambda \\ \alpha\,T &= T\,\Lambda \end{aligned}$$

Tendo em atenção os vectores próprios da matriz α:

$$[\alpha - \lambda_1 I] \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad t_{21} = \lambda_1 t_{11}$$

$$[\alpha - \lambda_2 I] \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad t_{22} = \lambda_2 t_{12}$$

será

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\delta + i\omega & -\delta - i\omega \end{bmatrix} \tag{8}$$

e

$$T^{-1} = \frac{1}{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \end{bmatrix} (\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{i}{2\,\omega \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -\delta - i\omega & -1 \\ \delta - i\omega & 1 \end{bmatrix} \tag{8'}$$

Voltando à equação (4) e fazendo $Y = T^{-1} X$,

$$D\,Y = \Lambda\, Y \tag{9}$$

A integração desta expressão poderá realizar-se por aproximações sucessivas:

$$Y = Y_o + \int_{to} \Lambda\, Y\, dt = Y_o + \int_{to}^{t} \Lambda \left\{ Y_o + \int_{to}^{t} \Lambda \left[Y_o + \int_{to}^{t} \Lambda \left(Y_o + \int_{to}^{t} \Lambda \left(\cdots \right) dt \right) dt \right] dt \right\} dt =$$

$$= \left[I + \Lambda\,(t - t_o) + \Lambda^2 \frac{(t-t_o)^2}{2\,!} + \Lambda^3 \frac{(t-t_o)^3}{3\,!} + \cdots \right] Y_o$$

Esta série corresponde ao desenvolvimento da função exponencial. Portanto

$$[Y] = e^{[\Lambda](t-t_o)} \,.\, [Y_o] = \begin{Bmatrix} e^{\lambda_1 (t-t_o)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 (t-t_o)} \end{Bmatrix} [Y_o] \tag{10}$$

uma vez que $[\Lambda]$ é uma matriz de elementos constantes e é diagonal.

Efectuando agora a transformação inversa

$$T\,Y = T\,T^{-1}\,X = X$$

$$X = T \begin{Bmatrix} e^{\lambda_1 (t-t_o)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 (t-t_o)} \end{Bmatrix} T^{-1}\,T\,Y_o$$

$$T\, e^{[\Lambda](t-t_o)}\, T^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_o)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_o)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2\, e^{\lambda_1(t-t_o)} - \lambda_1\, e^{\lambda_2(t-t_o)} & -e^{\lambda_1(t-t_o)} + e^{\lambda_2(t-t_o)} \\ \lambda_1 \lambda_2\, e^{\lambda_1(t-t_o)} - \lambda_1 \lambda_2\, e^{\lambda_2(t-t_o)} & -\lambda_1\, e^{\lambda_1(t-t_o)} + \lambda_2\, e^{\lambda_2(t-t_o)} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Como $T\,Y_o = X_o$, será, substituindo λ_1 e λ_2

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = e^{-\delta(t-t_o)} \begin{bmatrix} \cos[\omega(t-t_o)] + \frac{\delta}{\omega} \operatorname{sen}[\omega(t-t_o] & \frac{\delta}{\omega} \operatorname{sen}[\omega(t-t_o)] \\ -\frac{\omega_o^2}{\omega} \operatorname{sen}[\omega(t-t_o)] & \cos[\omega(t-t_o)] - \frac{\delta}{\omega} \operatorname{sen}[\omega(t-t_o)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Finalmente, tendo em consideração as substituições efectuadas no início e fazendo $x_{01} = x_0$ e $x_{02} = \dot{x}_0$, virá

$$\begin{cases} x = e^{-\delta(t-t_0)}\left[x_0 \cos[\omega(t-t_0)] + \dfrac{x_0\,\delta + \dot{x}_0}{\omega}\,\mathrm{sen}\,[\omega(t-t_0)]\right] \\ \dot{x} = e^{-\delta(t-t_0)}\left[-\dfrac{\omega_0^2\,x_0 + \delta\,\dot{x}_0}{\omega}\,\mathrm{sen}[\omega(t-t_0)] + \dot{x}_0 \cos[\omega(t-t_0)]\right] \end{cases} \tag{13}$$

A primeira equação de (13), integral geral da equação homogénea (1), representa o movimento da massa em função do tempo. A segunda, que aliás se poderia obter directamente da anterior por derivação, representa a velocidade da referida massa.

Confirmam-se as definições de ω e δ referidas atrás pela observação da expressão (13), pois $e^{-\delta(t-t_0)}$ é um factor de amortecimento do movimento enquanto que ω exprime uma velocidade angular.

Se não existirem amortecimentos, $\delta = 0$ e

$$\begin{cases} x = x_0 \cos[\omega_0(t-t_0)] + \dfrac{\dot{x}_0}{\omega_0}\,\mathrm{sen}\,[\omega_0(t-t_0)] \\ \dot{x} = -\omega_0 x_0\,\mathrm{sen}\,[\omega_0(t-t_0)] + \dot{x}_0 \cos[\omega_0(t-t_0)] \end{cases} \tag{14}$$

Estas expressões poder-se-iam determinar directamente a partir da equação (2) por este ou outro processo (*).

1.2. VIBRAÇÃO FORÇADA AMORTECIDA OU NÃO

1.2.1. *Modelo matemático*

Neste estudo consideram-se só as perturbações de carácter sinusoidal introduzidas nos sistemas cujo modelo físico se apresentou em 1.1., o que equivale a considerar qualquer perturbação periódica, uma vez que sendo esta decomponível numa série de Fourier e dadas as características de linearidade

---

(*) Um processo de integração da equação $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ que apresenta amplas perspectivas no estudo de movimentos não lineares, será estoutro:

$$\ddot{x}\dot{x} + \omega_0^2\, x\,\dot{x} = 0$$

ou

$$\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 = x_0^2 + \omega_0^2 x_0^2 = 2\,U_0$$

exprimindo U_0 a energia total do sistema em qualquer instante, valor constante uma vez que não há dissipação

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2\,U_0 - \omega_0^2\,x^2}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2\,U_0 - \omega_0^2\,x^2}} = \int_{t_0}^{t} dt$$

ou

$$\frac{1}{\omega_0}\int_{x_0}^{x} \frac{\dfrac{\omega_0}{\sqrt{2\,U_0}}\,dx}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_0^2}{2\,U_0}\,x^2}} = \frac{1}{\omega_0}\left[\arccos \frac{\omega_0}{\sqrt{2\,U_0}}\,x\right]_{x_0}^{x} = t - t_0$$

ou, finalmente

$$x = \frac{\sqrt{\dot{x}_0^2 + \omega_0^2 x_0^2}}{\omega_0}\cos\left[\omega_0(t-t_0) + \arccos \frac{\sqrt{\dot{x}_0^2 + \omega_0^2 x_0^2}}{\omega_0}\,x_0\right] =$$

$$= x_0 \cos[\omega_0(t-t_0)] + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\,\mathrm{sen}\,[\omega_0(t-t_0)]$$

exigidas aos modelos elásticos, o movimento resultante da perturbação complexa será um somatório de movimentos resultantes das perturbações sinusoidais de frequências diferentes.

A perturbação F (t) pode actuar na massa como força (fig. 1.2a) ou nas ligações ao exterior como deslocamento, (fig. 1.2b) mas sempre na direcção do movimento.

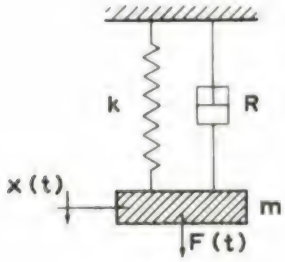


Fig. 1.2 a

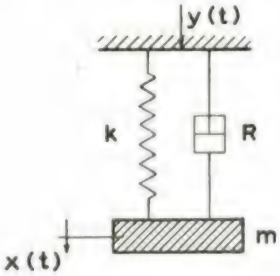


Fig. 1.2 b

Teremos para modelo matemático (*) no primeiro caso :

$$m\ddot{x} + R\dot{x} + kx = F(t) = \sum_{n=1}^{n} \left\{ A_{1n} \cos[nB(t-t_0)] + A_{2n} \operatorname{sen}[nB(t-t_0)] \right\} \tag{15}$$

No segundo caso, consoante o movimento perturbador actua parcialmente ou totalmente as ligações, assim teremos uma equação (15) em que os coeficientes A_i representam amplitudes de movimentos em vez de amplitudes de forças, a menos um factor de dimensionamento.

Tendo em consideração o que se disse no início desta alínea bastará esquematizar o problema para uma perturbação sinusoidal pura, por exemplo, a de frequência fundamental.

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{01}}{m} \operatorname{sen}[B(t-t_0)] \tag{16}$$

ou, para um sistema não amortecido $\delta = 0$ e

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{01}}{m} \operatorname{sen}[B(t-t_0)] \tag{16'}$$

O integral geral para esta equação diferencial será

$$x = x_g + x_p$$

em que x_g significa o integral geral da equação homogénea ou seja em regime livre, e x_p o integral particular para o sistema forçado. É este último valor que falta determinar.

1.2.2. *Integração da equação diferencial*

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{01}}{m} \operatorname{sen}[B(t-t_0)]$$

Tal como em 1.1.2. virá

$$D\,X = \alpha X + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_{01}}{m} \operatorname{sen}[B(t-t_0)] \end{bmatrix} = \tag{17}$$

$$= \alpha X + X_F$$

(*) Ver, por exemplo, A. Portela — Máquinas Alternativas I — Ed. A. E. I. S. T.

A equação (4) ficará

$$T^{-1} D X = T^{-1} \alpha T T^{-1} X + T^{-1} X_F \tag{18}$$

sendo agora

$$Y_F = T^{-1} X_F = T^{-1} \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right| \frac{F_{01}}{m} \text{ sen } [B (t - t_0)] = [A] \text{ sen } [B (t - t_0)] \tag{18'}$$

E a equação (9) fica

$$D Y = \Lambda Y + Y_F \tag{19}$$

A integração, aplicando o mesmo método, será

$$Y = Y_0 + \int_{t_0}^{t} Y_F \, dt + \int_{t_0}^{t} \Lambda Y \, dt = Y_0 + \int_{t_0}^{t} Y_F \, dt + \int_{t_0}^{t} \Lambda \Big\{ Y_0 + \int_{t_0}^{t} Y_F \, dt + \int_{t_0}^{t} \Lambda \, [Y_0 + \int_{t_0}^{t} Y_F \, dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \Lambda \, (Y_0 + \int_{t_0}^{t} Y_F \, dt + \int_{t_0}^{t} \Lambda \, (\ldots) \, dt) \, dt \,] \, dt \Big\} \, dt$$

A parte correspondente ao integral particular virá, depois de substituir (18')

$$Y_p = \sum_{n=1}^{\infty} [\Lambda]^{n-1} \iint_{n} \cdots \int_{t_0}^{t} [A] \text{ sen } [B (t - t_0)] \, dt^n =$$

$$= \left[- [I] \cos [B (t - t_0)] - \frac{[\Lambda]}{B} \text{ sen } [B (t - t_0)] + e^{[\Lambda] (t - t_0)} \right] .$$

$$. \left[[I] - \frac{[\Lambda]^2}{B^2} + \frac{[\Lambda]^4}{B^4} - \ldots \right] \frac{[A]}{B}$$

e, uma vez que

$$[\Lambda]^k = [\lambda i i^k]$$

por ser uma matriz diagonal,

$$Y_p = \left[- I \cos [B (t - t_0)] - \frac{[\Lambda]}{B} \text{ sen } [B (t - t_0)] + e^{[\Lambda] (t - t_0)} \right] .$$

$$. \begin{bmatrix} \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 \pm \left(\dfrac{\lambda_1}{B}\right)^{4n}}{1 + \left(\dfrac{\lambda_1}{B}\right)^2} & 0 \\ 0 & \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 \pm \left(\dfrac{\lambda_2}{B}\right)^{4n}}{1 + \left(\dfrac{\lambda_2}{B}\right)^2} \end{bmatrix} \frac{[A]}{B} \tag{20}$$

Este desenvolvimento só será válido se as séries dos $\lambda i i$ forem convergentes. É condição suficiente de convergência absoluta que

$$\text{mod } \lambda_1 < B$$
$$\text{mod } \lambda_2 < B$$

ou seja

$$\delta^2 + \omega^2 < B^2$$

ou, uma vez que $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$, $\omega_0 < B$

Nestas condições

$$Y_p = \left[- I \cos [B (t - t)] - \frac{\Lambda}{A} \operatorname{sen} [B (t - t_o)] + e^{\Lambda (t - t_o)} \right] .$$

$$. \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{\lambda_1}{B}\right)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{\lambda_2}{B}\right)^2} \end{bmatrix} . \frac{1}{B} [A] =$$

$$= \begin{bmatrix} - \cos [B (t - t_o)] - \dfrac{\lambda_1}{B} \operatorname{sen} [B (t - t_o)] + e^{\lambda_1 (t - t_o)} & 0 \\ 0 & - \cos [B (t - t_o)] - \dfrac{\lambda_2}{B} \operatorname{sen} [B (t - t_o)] + e^{\lambda_2 (t - t_o)} \end{bmatrix} .$$

$$. \begin{bmatrix} \dfrac{B}{B^2 + \lambda_1^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{B}{B^2 + \lambda_2^2} \end{bmatrix} [A] =$$

$$= \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} [A] = [\gamma] [A] \tag{21}$$

em que

$$\begin{cases} \rho_1 = \dfrac{B}{B^2 + \lambda_1^2} \left\{ - \cos [B (t - t_o)] - \dfrac{\lambda_1}{B} \operatorname{sen} [B (t - t_o)] + e^{\lambda_1 (t - t_o)} \right\} \\ \rho_2 = \dfrac{B}{B^2 + \lambda_2^2} \left\{ - \cos [B (t - t_o)] - \dfrac{\lambda_2}{B} \operatorname{sen} [B (t - t_o)] + e^{\lambda_2 (t - t_o)} \right\} \end{cases}$$

Efectuando agora a transformação inversa

$$X_p = T Y_p = T \gamma T^{-1} T A \tag{22}$$

Da equação (18')

$$T A = T T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{F_{01}}{m} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{F_{01}}{m} \end{bmatrix}$$

Tendo em consideração (8) e (8')

$$T \gamma T^{-1} = \frac{i}{2 \omega} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{i}{2 \omega} \begin{bmatrix} \lambda_2 \rho_1 - \lambda_1 \rho_2 & -\rho_1 + \rho_2 \\ \lambda_1 \lambda_2 (\rho_1 - \rho_2) & -\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Finalmente

$$X_p = \frac{i}{2 \omega} \begin{bmatrix} \lambda_2 \rho_1 - \lambda_1 \rho_2 & -\rho_1 + \rho_2 \\ \lambda_1 \lambda_2 (\rho_1 - \rho_2) & -\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{F_{01}}{m} \end{bmatrix} = \frac{i F_{01}}{2 m \omega} \begin{bmatrix} -\rho_1 + \rho_2 \\ -\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 \end{bmatrix}$$

e substituindo valores para λ_1, λ_2, ρ_1 e ρ_2 e tendo em atenção que

$$X_p = \begin{vmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_p \\ \dot{x}_p \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x_p = -\dfrac{\dfrac{F_{01}}{m}}{(B^2-\omega_0^2)^2+4B^2\delta^2}\Big\{2\delta B\cos[B(t-t_0)]+(B^2-\omega_0^2)\operatorname{sen}[B(t-t_0)]- \\ \qquad -e^{-\delta(t-t_0)}\Big[\dfrac{B}{\omega}(B^2+2\delta-\omega_0^2)\operatorname{sen}[\omega(t-t_0)]+2\delta B\cos[\omega(t-t_0)]\Big]\Big\} \\ \dot{x}_p = -\dfrac{\dfrac{F_{01}}{m}}{(B^2-\omega_0^2)^2+4B^2\delta^2}\Big\{-2\delta B^2\operatorname{sen}[B(t-t_0)]+(B^2-\omega_0^2)B\cos[B(t-t_0)]+ \\ \qquad +e^{-\delta(t-t_0)}\Big[\dfrac{B\delta}{\omega}(B^2+\omega_0^2)\operatorname{sen}[\omega(t-t_0)]-B(B^2-\omega_0^2)\cos[\omega(t-t_0)]\Big]\Big\} \end{cases} \quad (24)$$

Estas expressões representam o deslocamento e a velocidade do sistema com toda a generalidade desde a posição de repouso.

No caso de não haver amortecimento, $\delta = 0$ e

$$\begin{cases} x_p = -\dfrac{\dfrac{F_{01}}{m}}{B^2-\omega_0^2}\Big[\operatorname{sen}[B(t-t_0)]-\dfrac{B}{\omega_0}\operatorname{sen}[\omega_0(t-t_0)]\Big] \\ \dot{x}_p = \dfrac{B\dfrac{F_{01}}{m}}{B^2-\omega_0^2}\Big[\cos[B(t-t_0)]-\cos[\omega_0(t-t_0)]\Big] \end{cases} \quad (25)$$

expressões que se poderiam deduzir directamente a partir da expressão (16').

A solução completa para a equação (16) será então, adicionando as expressões do integral geral da equação homogénea, e do integral particular agora determinado

$$\begin{cases} x = e^{-\delta(t-t_0)}\Big\{\Big[x_0+\dfrac{2\delta B\dfrac{F_{01}}{m}}{(B^2-\omega_0^2)^2+4B^2\delta^2)}\Big]\cos[\omega(t-t_0)]+ \\ \quad +\Big[\dfrac{x_0\delta+\dot{x}_0}{\omega}+\dfrac{\dfrac{B}{\omega}(B^2+2\delta^2-\omega_0^2)\dfrac{F_{01}}{m}}{(B^2-\omega_0^2)^2+4B^2\delta^2}\Big]\operatorname{sen}[\omega(t-t_0)]\Big\}- \\ \quad -\dfrac{\dfrac{F_{01}}{m}}{(B^2-\omega_0^2)^2+4B^2\delta^2}\Big\{2\delta B\cos[B(t-t_0)]+(B^2-\omega_0^2)\operatorname{sen}[B(t-t_0)]\Big\} \\ \dot{x} = e^{-\delta(t-t_0)}\Big\{\Big[\dot{x}_0+\dfrac{B(B^2-\omega_0^2)\dfrac{F_{01}}{m}}{(B^2-\omega_0^2)^2+4B^2\delta^2}\Big]\cos[\omega(t-t_0)]- \\ \quad -\Big[\dfrac{\omega_0^2x_0+\delta\dot{x}_0}{\omega}+\dfrac{\dfrac{B\delta}{\omega}(B^2+\omega_0^2)\dfrac{F_{01}}{m}}{(B^2-\omega_0^2)^2+4B^2\delta^2}\Big]\operatorname{sen}[\omega(t-t_0)]\Big\}- \\ \quad -\dfrac{\dfrac{F_{01}}{m}}{(B^2-\omega_0^2)^2+4B^2\delta^2}\Big\{(B^2-\omega_0^2)B\cos[B(t-t_0)]-2\delta B^2\operatorname{sen}[B(t-t_0)]\Big\} \end{cases} \quad (26)$$

®Perbunan C - evita a chama e resiste ao calor

Os artigos feitos da borracha de cloroprene Perbunan C, distinguem-se por uma combinação favorável de propriedades técnicamente valiosas. Evitam a chama e resistem ao calor, às intempéries e ao ozono, aos óleos e aos agentes químicos e têm boas propriedades mecânicas.

O Perbunan C é especialmente apropriado para a fabricação de bainhas de cabos eléctricos e isolamentos para corrente de baixa tensão, artigos técnicos moldados, para a construção de automóveis, de vagões e de máquinas, para perfis de vedação, mangueiras, correias de transporte, rolos, para a impregnação e o revestimento de tecidos, para solas e para colas.

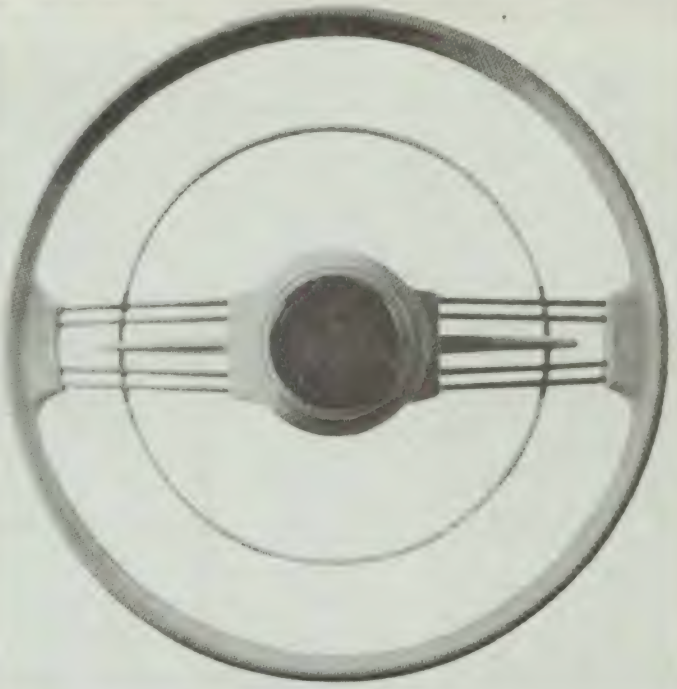
PERBUNAN C o Cloroprene da BAYER

Representante em Portugal:
S.A.R.L. QUIMICOR
Lisboa: Rua Sociedade Farmacêutica, 3
Tel. 555496 e 555893
Porto: Rua de Santos Pousada, 441
Tel. 54141

2501

perbunan® c

1863 BAYER 1963



Sobre 2 ou sobre 4 rodas
Peças de plástico Cellidor

O *Cellidor é um excelente material para a fabricação de acessórios para automóveis e para biciclos. Não tem apenas boa resistência mecânica, também as suas superfícies conservam e aumentam o seu alto brilho, pelo uso, e tem ainda um toque agradável.

Presta-se também para envolver peças metálicas, pois não abre fendas, que dariam lugar à corrosão.

Este material amortece o som.

Não atrai as poeiras porque não é susceptível de carregar-se de electricidade estática.

Há muito que o Cellidor se introduziu com vantagem na fabricação de acessórios para automóveis, como volantes, revestimentos das colunas de direcção, botões de comando nos «tabliers», revestimentos para conta-quilómetros, farolins trazeiros, frisos interiores, assim como protectores de correntes e chapas protectoras para biciclos.

Quando precisar de tipos especiais para os seus artigos, consulte as nossas representações

S.A.R.L. QUIMICOR, Representante em Portugal
Lisboa, Rua Sociedade Farmacêutica, 3, Tel. 42194
Porto, Rua de Santos Pousada, 441, Tel. 54141

2675 a

cellidor® 1863 BAYER 1963

Ficam assim definidas por via analítica as expressões completas do deslocamento e da velocidade do sistema perturbado com condições iniciais quaisquer, englobando as fases transitória e permanente do movimento.

Ou, para o sistema não amortecido

$$\begin{cases} x = x_0 \cos[\omega_0 (t - t_0)] + \left[\dfrac{\dot{x}_0}{\omega_0} + \dfrac{B \dfrac{F_{01}}{m}}{\omega_0 (B^2 - \omega_0^2)}\right] \operatorname{sen}[\omega_0 (t - t_0)] - \dfrac{\dfrac{F_{01}}{m}}{B^2 - \omega_0^2} \operatorname{sen}[B (t - t_0)] \\ \dot{x}_0 = \left[\dfrac{B \dfrac{F_{01}}{m}}{B^2 - \omega_0^2} + \dot{x}_0\right] \cos[\omega_0 (t + t)] - \omega_0 x_0 \operatorname{sen}[\omega_0 (t - t_0)] - \dfrac{B \dfrac{F_{01}}{m}}{B^2 - \omega_0^2} \cos[B (t - t_0)] \end{cases} \tag{27}$$

Note-se que estas expressões foram deduzidas para o caso de ser $B > \omega_0$, pois só nestas condições provámos a condição suficiente de absoluta convergência da série de integrais, porém esta circunstância não invalida a aplicação dos resultados ao caso de ser $B < \omega_0$ porque as expressões (24) verificam a equação diferencial sem quaisquer restrições paramétricas. A solução não é incompleta porque o integral da equação (16) é combinação linear de duas soluções particulares linearmente independentes.

1.3 REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

1.3.1 *Vibração livre*

1.3.1.1 Sem amortecimento

Nos sistemas não amortecidos, tal como as expressões (14) mostram, a representação do movimento num diagrama deslocação ou velocidade-tempo é uma sinusoidal pura. Arranjando as referidas fórmulas

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}} \cos[\omega_0 (t - t_0) - \varepsilon] \\ \dot{x} &= \sqrt{x_0^2 \omega_0^2 + \dot{x}_0^2} \operatorname{sen}[\omega_0 (t - t_0) - \varepsilon] \end{aligned} \tag{14'}$$

em que

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}$$

A sua representação gráfica será (fig. 1.3).

1.3.1.2 Com amortecimento

Nos sistemas amortecidos, e arranjando as fórmulas (13) :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x_0 \delta + \dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \, e^{-\delta (t - t_0)} \cos[\omega (t - t_0) - \varepsilon_1] \\ \dot{x} &= -\sqrt{\dot{x}_0^2 + \left(\frac{\omega_0^2 x_0 + \delta \dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \, e^{-\delta (t - t_0)} \operatorname{sen}[\omega (t - t_0) - \varepsilon_2] \end{aligned} \tag{13'}$$

em que

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{x_0 \delta + \dot{x}_0}{\omega x_0}$$

e

$$\operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{\dot{x}_0 \omega}{\omega^2 x_0 + \delta \dot{x}_0}$$

Representam curvas periódicas de carácter sinusoidal de amplitudes decrescendo logarìtmicamente (Fig. 1.4).

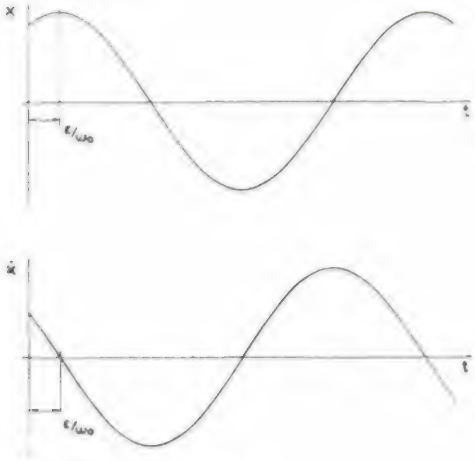


Fig. 1.3

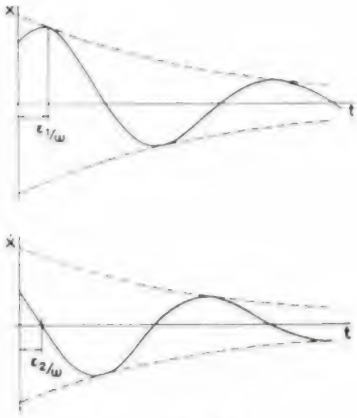


Fig. 1.4

Verifica-se que, teòricamente, o sistema estaciona ao fim de um tempo infinito. Na realidade havendo atritos de carácter não viscoso, o sistema pára num tempo finito.

1.3.2 *Vibração forçada.*

1.3.2.1 Sem amortecimento.

As expressões de (27) poderão escrever-se

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}} \cos\left[\omega_0 (t - t_0) - \varepsilon\right] + \frac{\frac{F_0 l}{m}}{\omega_0 (B + \omega_0)} \operatorname{sen}\left[\omega_0 (t - t_0)\right] -$$

$$- \frac{2 \frac{F_0 l}{m}}{B^2 - \omega_0^2} \operatorname{sen} \frac{(B - \omega_0)(t - t_0)}{2} \cos \frac{(B + \omega_0)(t - t_0)}{2} \qquad (27')$$

$$\dot{x} = -\sqrt{x_0^2 \omega_0^2 + \dot{x}_0^2} \operatorname{sen}\left[\omega_0 (t - t_0) - \varepsilon\right] + \frac{2 B \frac{F_0 l}{m}}{B^2 - \omega_0^2} \operatorname{sen} \frac{(B - \omega_0)(t - t_0)}{2} \operatorname{sen} \frac{(B + \omega_0)(t - t_0)}{2}$$

em que $$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}$$

Pela expressão da velocidade verifica-se que esta é dada pela sobreposição de um termo sinusoidal de frequência $\frac{\omega_0}{2\pi}$ e de um outro representando um «batimento» de ω_0 com B.

Se no momento de aplicação da perturbação for $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, a curva da velocidade será (Fig. 1.5).

Nestas condições a curva do deslocamento não é tão pura, pois é uma soma duma curva deste tipo com uma sinusoidal de frequência $\frac{\omega_0}{2\pi}$ (fig. 1.6), sendo a importância desta última curva tanto menor quanto mais se aproxima B de ω_0.

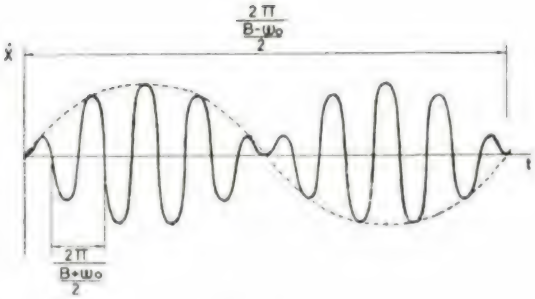


Fig. 1.5

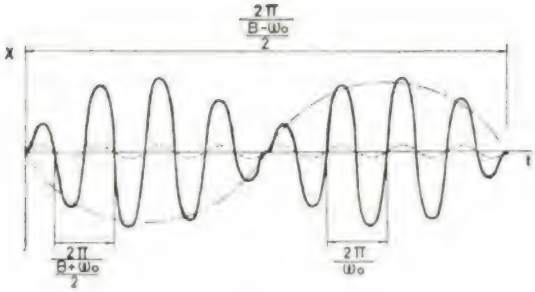


Fig. 1.6

No caso particular de ser $B = \omega_0$, portanto quando a frequência imposta ao sistema entra em ressonância com a sua frequência própria

$$\lim_{B \to \omega_0} \frac{2\,\dfrac{F_{01}}{m}}{B^2 - \omega_0^2}\ \text{sen}\ \frac{(B-\omega_0)\,(t-t_0)}{2}\ \cos\ \frac{(B+\omega_0)\,(t-t_0)}{2} =$$

$$= \lim_{B \to \omega_0} \frac{\dfrac{F_{01}}{m}}{B^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{\text{sen}\left[\dfrac{B-\omega_0}{2}\,(t-t_0)\right]}{\dfrac{B-\omega_0}{2}\,(t-t_0)} \cdot (t-t_0)\ \cos\ \frac{(B+\omega_0)\,(t-t_0)}{2} =$$

$$= \frac{\dfrac{F_{01}}{m}}{B+\omega_0}\,(t-t_0)\ \cos\ \frac{(B+\omega_0)\,(t-t_0)}{2}$$

e as expressões (27′) vêm

$$\begin{cases} x = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}\ \cos\left[\omega_0\,(t-t_0) - \varepsilon\right] + \dfrac{\dfrac{F_{01}}{m}}{2\,\omega_0^2}\ \text{sen}\left[\omega_0\,(t-t_0)\right] - \\ \qquad\qquad - \dfrac{\dfrac{F_{01}}{m}}{2\,\omega_0}\,(t-t_0)\ \cos\left[\omega_0\,(t-t_0)\right] \\ \dot{x} = -\sqrt{x_0^2\,\omega_0^2 + \dot{x}_0^2}\ \text{sen}\left[\omega_0\,(t-t_0) - \varepsilon\right] + \dfrac{\dfrac{F_{01}}{m}}{2}\,(t-t_0)\ \text{sen}\left[\omega_0\,(t-t_0)\right] \end{cases} \qquad (27'')$$

a que correspondem as curvas das fig. 1.7 e 1.8 traçadas para $x_0 = \dot{x}_0 = 0$. Estas curvas justificam

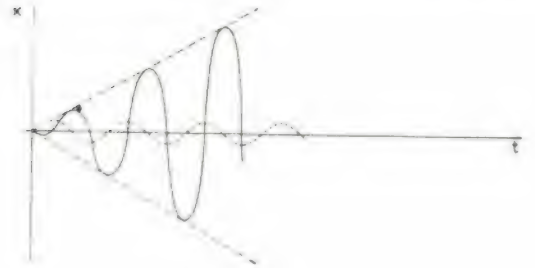


Fig. 1.7

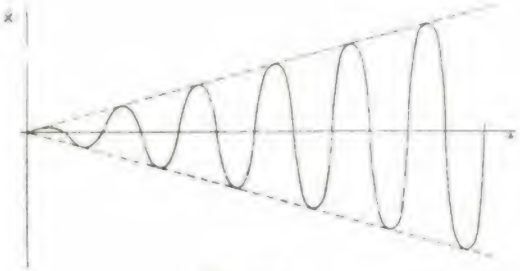


Fig. 1.8

porque o sistema não amortecido não é sùbitamente destruído ao entrar em ressonância como nos faz crer o formulário correntemente adoptado.

Há sempre um intervalo de tempo necessário para que a vibração do sistema ultrapasse os limites admissíveis para a sua integridade, dependente como se verifica da frequência da oscilação e do cociente $\frac{F_{01}}{m}$.

1.3.2.2 Com amortecimento

A primeira expressão de (26) poderá escrever-se

$$x = e^{-\delta(t-t_0)} \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x_0\,\delta + \dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \cos[\omega(t-t_0) - \varepsilon_1] -$$

$$- \frac{B}{\omega} e^{-\delta(t-t_0)} \frac{\frac{F_{01}}{m}}{\sqrt{(B^2-\omega_0^2)^2 + 4\,\delta^2 B^2}} \cos[\omega(t-t_0) - \varepsilon_2] -$$

$$- \frac{\frac{F_{01}}{m}}{\sqrt{(B^2-\omega_0^2)^2 + 4\,\delta^2 B^2}} \cos[B(t-t_0) - \theta] \qquad (26')$$

em que

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{x_0\,\delta + \dot{x}_0}{\omega\, x_0}$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{B^2 + 2\,\delta^2 - \omega_0^2}{2\,\delta\,\omega}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{B^2 - \omega_0^2}{2\,\delta\, B}$$

θ é o chamado ângulo de fase entre a força perturbadora e o movimento.

A expressão da velocidade será

$$\dot{x} = e^{-\delta(t-t_0)} \sqrt{\dot{x}_0^2 + \left(\frac{\omega_0^2\, x_0 + \delta\, \dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \cos[\omega(t-t_0) - \varepsilon'_1] +$$

$$+ \frac{B\,\omega_0}{\omega} e^{-\delta(t-t_0)} \frac{\frac{F_{01}}{\omega}}{\sqrt{(B^2-\omega_0^2)^2 + 4\,\delta^2 B^2}} \cos[\omega(t-t_0) - \varepsilon'_2] -$$

$$- B \frac{\frac{F_{01}}{m}}{\sqrt{(B^2-\omega_0^2)^2 + 4\,\delta^2 B^2}} \cos[\omega(t-t_0) - \theta'] \qquad (26')$$

em que

$$\operatorname{tg} \varepsilon'_1 = - \frac{\omega_0^2\, x_0 + \delta\, \dot{x}_0}{\omega\, \dot{x}_0}$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon'_2 = - \frac{\delta\,(B^2 + \omega_0^2)}{\omega\,(B^2 - \omega_0^2)}$$

$$\operatorname{tg} \theta' = - \frac{2\,\delta\, B}{B^2 - \omega_0^2} = - \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}$$

Finalmente as expressões referidas em (26) tomarão a seguinte forma:

$$x = e^{-\delta (t - t_0)} \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x_0 \delta + \dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \cos [\omega (t - t_0) - \varepsilon_2] +$$

$$+ \frac{\frac{F_{01}}{m}}{\sqrt{(B^2 - \omega_0^2) + 4 \delta^2 B^2}} \left[1 - \frac{B}{\omega} e^{-\delta (t - t_0)}\right] \cos [\omega (t - t_0) - \varepsilon_2] -$$

$$- \frac{2 \frac{F_{01}}{m}}{\sqrt{(B^2 - \omega_0^2) + 4 \delta^2 B^2}} \cos \frac{(\omega + B)(t - t_0) - \varepsilon_1 - \theta}{2} \cos \frac{(\omega - B)(t - t_0) - \varepsilon_1 + \theta}{2} \tag{26''}$$

$$\dot{x} = e^{-\delta (t - t_0)} \sqrt{\dot{x}_0^2 + \left(\frac{\omega_0 x_0 + \delta \dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \cos [\omega (t - t_0) - \varepsilon'_1] +$$

$$+ \frac{B \frac{F_{01}}{m}}{\sqrt{(B^2 - \omega_0^2)^2 + 4 \delta B^2}} \left[1 + \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta (t - t_0)}\right] \cos [\omega (t - t_0) - \varepsilon'_2] -$$

$$- \frac{B \frac{F_{01}}{m}}{\sqrt{(B^2 - \omega_0^2)^2 + 4 \delta^2 B^2}} \cos \frac{(\omega + B)(t - t_0) - \varepsilon'_2 - \theta'}{2} \cos \frac{(\omega - B)(t - t_0) - \varepsilon'_2 + \theta'}{2}$$

O 1.° termo nas duas expressões de x e $\dot{x}$ refere-se ao movimento livre.

O 2.° termo, de amplitude constante, de frequência igual à frequência prórpria do sistema, poderá ser nulo em relação ao deslocamento para $B = \omega$ ou muito pequeno no início do movimento mas tende para um valor estacionário quando $t \to \infty$.

O 3.° termo representa o batimento, independente do tempo, mas é influenciável pelo 2.° termo à medida que o tempo decorre acabando por se anularem as oscilações de frequência ω e ficando o sistema a oscilar segundo a seguinte expressão que define o movimento depois da fase transitória.

$$\left\{ \begin{aligned} x &= - \frac{\frac{F_{01}}{m}}{\sqrt{(B^2 - \omega_0^2) + 4 \delta^2 B^2}} \cos [B (t - t_0) - \theta] = \\ &= \frac{\frac{F_{01}}{m}}{\sqrt{(B^2 - \omega_0^2)^2 + 4 \delta^2 B^2}} \cos [B (t - t_0) - \theta_1] \\ \dot{x} &= - B \frac{\frac{F_{01}}{m}}{\sqrt{(B^2 - \omega_0^2)^2 + 4 \delta^2 B^2}} \cos [B (t - t_0) - \theta'] \\ &= - B \frac{\frac{F_{01}}{m}}{\sqrt{(B^2 - \omega_0^2)^2 + 4 \delta^2 B^2}} \operatorname{sen} [B (t - t_0) - \theta_1] \end{aligned} \right. \tag{28}$$

portanto, com a frequência imposta, com amplitude constante mesmo para $B = \omega_0$, e com um desfasamento em relação à força perturbadora:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\omega_0^2 - B^2}{2 \delta B}$$

Estas são as expressões conhecidas e correntemente apresentadas nos livros de texto.

Interessa apresentar gráficos das amplitudes do movimento depois da fase transitória, e do respectivo ângulo de fase em função dos vários parâmetros definidores do sistema.

Para tal convém definir as relações

$$\nu = \frac{\delta}{\omega_0}$$

$$c = \frac{B}{\omega_0}$$

$$f = \frac{x_0}{x_{est}} = \frac{x_0}{\frac{F_{01}}{m\,\omega_0^2}} = \frac{x_0}{\frac{F_{01}}{k}}$$

respectivamente índice de amortecimento, índice de ressonância e factor de amplificação, sendo x_{est} a deflexão estática da mola sob a acção de uma força igual à amplitude da força perturbadora.

Teremos então

$$\left|\frac{x_0}{x_{est}}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-c^2)^2 + 4\,\nu^2\,c^2}} \qquad (29)$$

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{1-c^2}{2\,\nu\,c}$$

a que correspondem as famílias de curvas das figs. 1.9 e 1.10.

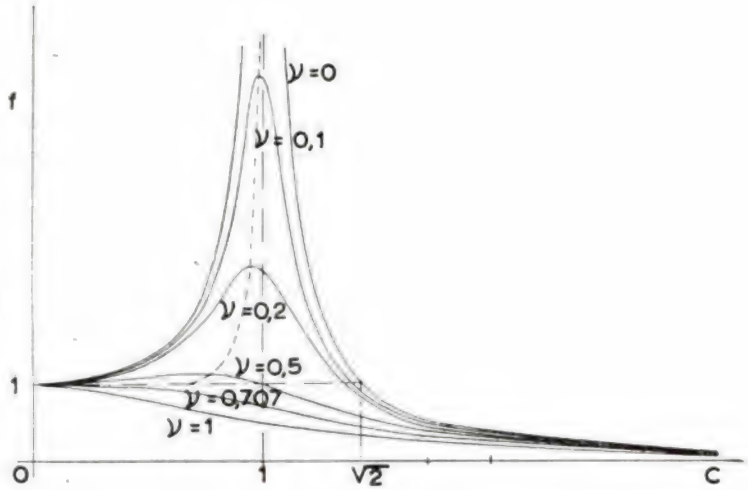


Fig. 1.9

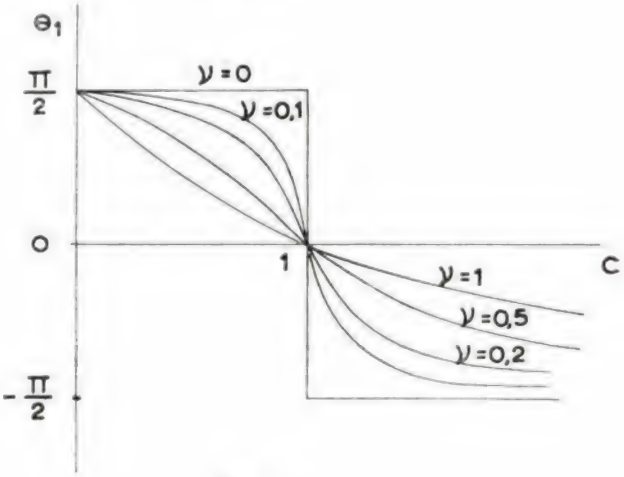


Fig. 1.10

1.4 ENERGIAS POSTAS EM JOGO

1.4.1 *Sistema livre amortecido ou não*

Na expressão (1) podemos fazer

$$m\,\ddot{x}\,\dot{x} + R\,\dot{x}^2 + k\,x\,\dot{x} = 0$$

e primitivando entre dois instantes t_0 e t

$$m\left[\frac{\dot{x}^2}{2}\right]_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} R\,\dot{x}^2\,dt + k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{t_0}^{t} = 0 \qquad (30)$$

O primeiro e o terceiro termos representam, respectivamente, a energia cinética e potencial do sistema. O segundo representa a energia dissipada por atrito, e obtém-se substituindo $\dot{x}$ conhecido atrás

$$\int_{t_0}^{t} R\,\dot{x}^2\,dt = R\int_{t_0}^{t} e^{-2\delta(t-t_0)}\left\{\left(\frac{\omega_0^2 x_0 + \delta\,\dot{x}_0}{\omega}\right)\operatorname{sen}^2\left[\omega(t-t_0)\right] + \dot{x}_0^2\cos^2\left[\omega(t-t_0)\right] -\right.$$

$$- 2 \frac{\omega_0^2 x_0 + \delta \dot{x}_0}{\omega} \dot{x}_0 \operatorname{sen} [\omega (t - t_0)] \cdot \cos [\omega (t - t_0)] \Big\} dt =$$

$$= R \frac{(\omega_0^2 x_0 + \delta \dot{x}_0)^2}{2 \omega_0^2} \left[- \frac{1}{2 \omega} e^{-2 \delta (t - t_0)} \operatorname{sen} [2 \omega (t - t_0)] - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta}{\omega^2} e^{-2 \delta (t - t_0)} \operatorname{sen}^2 [\omega (t - t_0)] + \frac{1}{2 \delta} \left(1 - e^{-2 \delta (t - t_0)} \right) \right] +$$

$$+ R \dot{x}_0^2 \left[\frac{\omega_0^2 + \delta^2}{4 \omega_0^2 \delta} \left(1 - e^{-2 \delta (t - t_0)} \right) + \frac{\omega}{4 \omega_0^2} e^{-2 \delta (t - t_0)} \operatorname{sen} [2 \omega (t - t_0)] + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta}{2 \omega_0^2} e^{-2 \delta (t - t_0)} \operatorname{sen}^2 [\omega (t - t_0)] - 2 R \frac{x_0 \omega_0^2 + \delta \dot{x}_0}{\omega} \dot{x}_0 \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\omega}{2 \omega_0^2} e^{-2 \delta (t - t_0)} \operatorname{sen}^2 [\omega (t - t_0)] - \frac{\delta}{4 \omega_0^2} e^{-2 \delta (t - t_0)} \operatorname{sen} [2 \omega (t - t_0)] + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega}{4 \omega_0^2} \left(1 - e^{-2 \delta (t - t_0)} \right) \right]$$

No fim de n períodos

$$2 \delta (t - t_0) = 2 \delta n T$$

$$\omega (t - t_0) = n \omega T = 2 \pi n$$

e

$$\int_0^{nT} R \dot{x}^2 dt = \frac{R}{4 \delta} [\omega_0^2 x_0^2 + \dot{x}_0^2] \left[1 - e^{-2 \delta n T} \right]$$

e, dado que $\delta = \dfrac{R}{2 m}$

$$\int_0^{nT} R \dot{x}^2 dt = \left[\frac{m}{2} (\omega_0 x_0)^2 + \frac{m}{2} \dot{x}_0^2 \right] \left[1 - e^{-2 \delta n T} \right] =$$

$$= \left[\frac{k}{2} x_0^2 + \frac{m}{2} \dot{x}_0^2 \right] \left[1 - e^{-2 \delta n T} \right] \tag{31}$$

A energia dissipada ao fim de um tempo infinito, quando o sistema atinge o repouso, será

$$\int_0^{\infty} R \dot{x}^2 dt = \frac{1}{2} k x_0^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 \tag{32}$$

evidentemente, a energia total do sistema.

Se o sistema for não dissipativo

$$\int_0^{nT} R \dot{x}^2 dt = 0$$

o sistema não para mais.

1.4.2 *Sistema forçado*

1.4.2.1 Não amortecido

A expressão (16) pode escrever-se

$$m\,\ddot{x}\,\dot{x} + k\,x\,\dot{x} = F_{01}\,\text{sen}\,[B\,(t-t)]\,\dot{x}$$

e, integrando entre dois instantes,

$$\left[m\,\frac{\dot{x}^2}{2}\right]_{t_0}^{t} + \left[k\,\frac{x^2}{2}\right]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} F_{01}\,\text{sen}\,[B\,(t-t_0)]\,\dot{x}\,dt \tag{33}$$

Substituindo agora $\dot{x}$ dado por (27), no 2.° membro da expressão, fica

$$\int_{t_0}^{t} F_{01}\,\text{sen}\,[B\,(t-t_0)]\,\dot{x}_0\,dt = F_{01}\left\{\left[\frac{B\,\frac{F_{01}}{m}}{B^2-\omega_0^2} + \dot{x}_0\right]\int_{t_0}^{t}\cos\,[\omega_0\,(t-t_0)]\,.\,\text{sen}\,[B\,(t-t_0)]\,dt\,-\right.$$

$$\left.-\,\omega_0\,x_0\int_{t_0}^{t}\text{sen}\,[\omega_0\,(t-t_0)]\,\text{sen}\,[B\,(t-t_0)]\,dt - \frac{B\,\frac{F_{01}}{m}}{B^2-\omega_0^2}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}\,\text{sen}\,[2\,B\,(t-t_0)]\,dt\right\} =$$

$$= F_{01}\left\{\left[\frac{B\,\frac{F_{01}}{m}}{B^2-\omega_0^2} + \dot{x}_0\right]\left[\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}\,\text{sen}\,[(B+\omega_0)\,(t-t_0)]\,dt + \int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}\,\text{sen}\,[(B-\omega_0)\,(t-t_0)]\,dt\right]-\right.$$

$$-\,\omega_0\,x_0\left[\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}\cos\,[(B-\omega_0)\,(t-t_0)]\,dt - \int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}\cos\,[(B+\omega_0)\,(t-t_0)]\,dt\right]-$$

$$\left.-\,\frac{B\,\frac{F_{01}}{m}}{B^2-\omega_0^2}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}\,\text{sen}\,[2\,B\,(t-t_0)]\,dt\right\} =$$

$$= F_{01}\left\{\left[\frac{B\,\frac{F_{01}}{m}}{B^2-\omega_0^2} + \dot{x}_0\right]\left[-\frac{1}{2\,(B+\omega_0)}\Big(\cos\,[(B+\omega_0)\,(t-t_0)]-1\Big)-\right.\right.$$

$$\left.-\,\frac{1}{2\,(B-\omega_0)}\Big(\cos\,[(B-\omega_0)\,(t-t_0)]-1\Big)\right]-\omega_0\,x_0\left[\frac{1}{2\,(B-\omega_0)}\,\text{sen}\,[(B-\omega_0)\,(t-t_0)]\,-\right.$$

$$\left.\left.-\,\frac{1}{2\,(B+\omega_0)}\,\text{sen}\,[(B+\omega_0)\,(t-t_0)]\right] + \frac{B\,\frac{F_{01}}{m}}{B^2-\omega_0^2}\cdot\frac{1}{4\,B}\Big(\cos\,[2\,B\,(t-t_0)]-1\Big)\right\} \tag{34}$$

Quando a diferença $(t - t_0)$ for tal que

$$(B+\omega_0)\,(t-t_0) = n_1\,.\,2\pi$$

$$(B-\omega_0)\,(t-t_0) = n_2\,.\,2\pi$$

em que n_1 e n_2 são inteiros, a energia acumulada no sistema desaparece, uma vez que $2\,B\,(t-t_0)$ por consequência também é multiplo de 2π, e a integração acima obtida anula-se nesse intervalo.

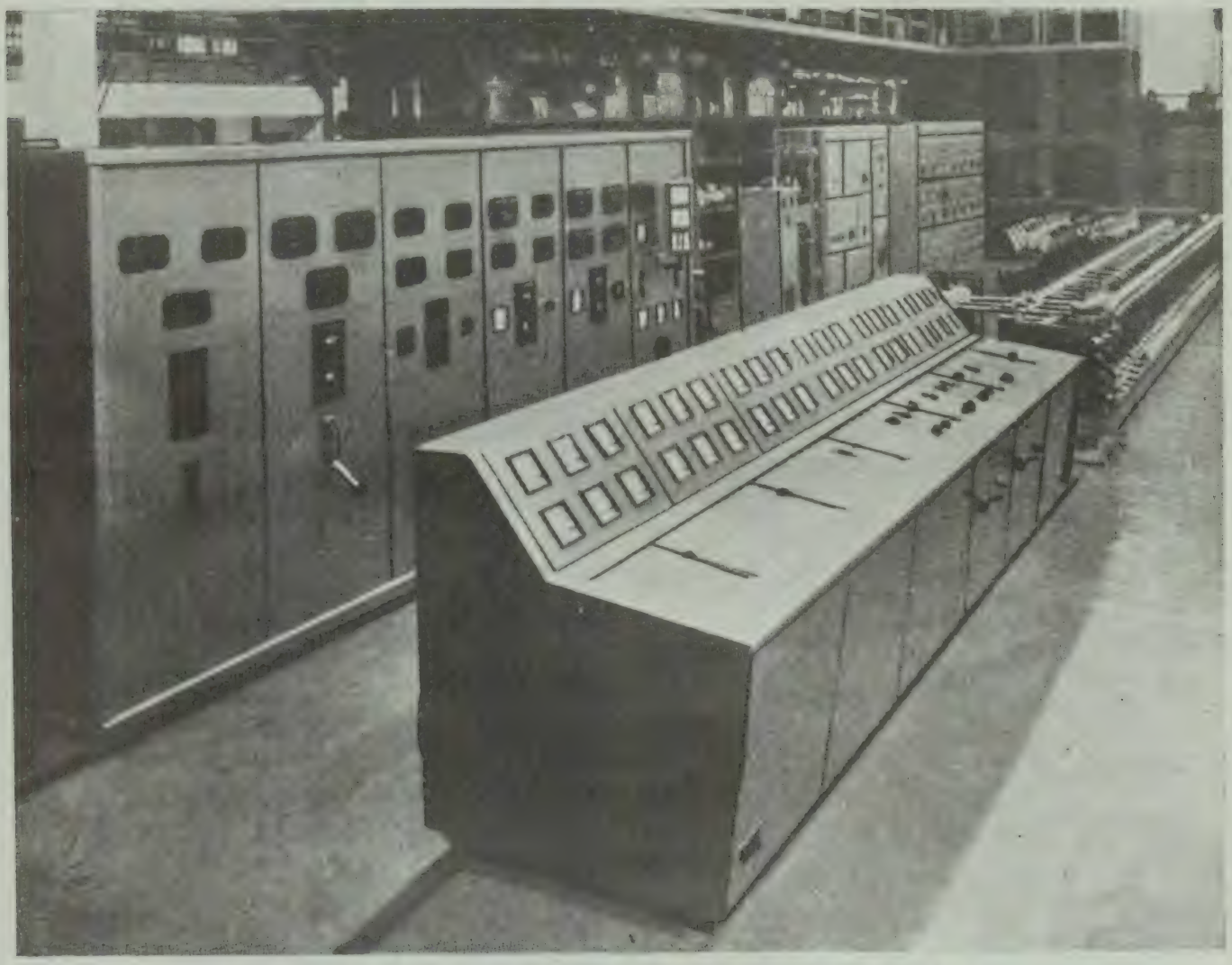
JAYME DA COSTA, L^DA

MECÂNICA E ELECTRICIDADE EM TODAS AS APLICAÇÕES

PORTO
Praça da Batalha, 12
Telef. 2 28 12 (PPC)

LISBOA
Rua dos Correeiros, 14
Telef. 32 70 35 (PPC)

LUANDA
Cx. Postal 5174
Telef. 4743

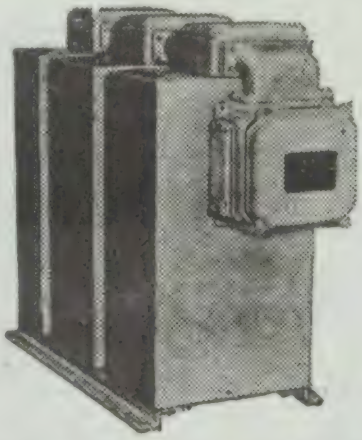


Material fabricado nas nossas oficinas, pronto para expedição

- Fabricação de aparelhagem eléctrica de alta e baixa tensão
- Equipamentos electromecânicos completos para centrais e fábricas
- Postos de transformação tipo monobloco
- Quadros blindados, capsulados e em armário
- Armaduras de iluminação de todos os tipos
- Contadores eléctricos e instrumentos de medida
- Telemedida e telecomando
- Instalações elevatórias de água
- Instalações de saneamento e esgotos
- Ferramentas de corte
- Motores Diesel industriais e marítimos
- Fogões eléctricos
- Frigoríficos
- Ventilação e condicionamento de ar
- Aparelhagem de Raios X e electromedicina

CONDENSADORES ASEA

PARA MELHORAMENTO DO FACTOR DE POTÊNCIA



Bateria de condensadores tipo CLB, 32 kVAr

- SE PAGA POR CONSUMO DE ENERGIA REACTIVA...
- SE A SUA INSTALAÇÃO ELÉCTRICA ESTÁ SOBRECARREGADA...

...consulte:

ASEA ELÉCTRICA L.DA

SEDE EM LISBOA
R. DE ARTILHARIA UM, 104, 4.º-D.º
Telefone P.P.C. — 68 90 17/8/9

END. TELEG.
ASEAPORT

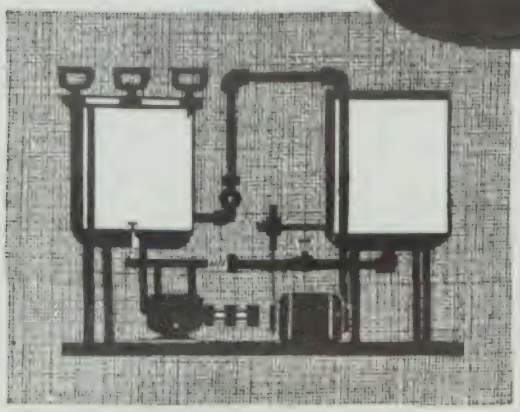
FILIAL NO PORTO
R. DO CAMPO ALEGRE, 144
Telefone P.P.C. — 6 21 06/7

filtros FILFRO, L.da

ALGUMAS DAS PRINCIPAIS APLICAÇÕES:

Agua • Açúcar • Óleos vegetais, animais e minerais • Cerveja
Sabão liquido • Resinas naturais e sintéticas • Vinhos • Vinagre
Glicerina • Tintas • Vernizes
Sumos de frutos • Xaropes
Azeite • Industria quimica

FILTROS NACIONAIS PARA TODOS OS PROBLEMAS DE FILTRAÇÃO



Inteiramente fabricados em Portugal, por técnicos e operários portugueses, segundo a patente port. n.º 29.917

Dezenas de instalações a funcionar no país atestam a sua excelente qualidade.

RUA CAPITÃO FILIPE DE SOUSA, 128
CALDAS DA RAINHA

FILTROS FILFRO, L.da PORTUGAL

Ora $n_1 > n_2$ são inteiros, e o menor intervalo corresponde a $n_2 = 1$, e portanto o sistema acumula e elimina energia perturbadora entre dois batimentos mantendo o balanço total constante e igual à energia do sistema antes de perturbado.

Se $B = \omega_0$, $t - t_0 = \infty$ e o sistema só acumula energia, como se verifica em 1.3.2.1.

1.4.2.2 Amortecido

A expressão (16) virá agora

$$m \ddot{x} \dot{x} + R \dot{x}^2 + k x \dot{x} = F_{01} \operatorname{sen} [B (t - t_0)] \dot{x}$$

e integrando

$$\left[m \frac{\dot{x}^2}{2} \right]_{t_0}^{t} + \left[k \frac{x^2}{2} \right]_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} R \dot{x}^2 \, dt = \int_{t_0}^{t} F_{01} \operatorname{sen} [B (t - t_0)] \dot{x} \, dt$$

ou

$$U - U_0 = \frac{1}{2} \left[m (\dot{x}^2 - \dot{x}_0^2) + k (x^2 - x_0^2) \right] = \int_{t_0}^{t} \left[F_{01} \operatorname{sen} [B (t - t_0)] - R \dot{x} \right] \dot{x} \, dt \qquad (35)$$

Substituindo $\dot{x}$ obtido em (26) e fazendo na fórmula resultante

$$\frac{2 \delta B^2 \frac{F_{01}}{m}}{(B^2 - \omega_0^2)^2 + 4 \delta^2 B^2} = A$$

$$\frac{B (B^2 - \omega_0^2)^2 \frac{F_{01}}{m}}{(B^2 - \omega_0^2)^2 + 4 \delta^2 B^2} = D \qquad (36)$$

$$\frac{\omega_0^2 x_0 + \delta \dot{x}_0}{\omega} = E$$

$$\frac{\frac{B \delta}{\omega} (B^2 + \omega_0^2) \frac{F_{01}}{m}}{(B^2 - \omega_0^2)^2 + 4 \delta^2 B^2} = G$$

obteremos

$$U - U_0 = \int_{t_0}^{t} \Big[(F_{01} - R A) \operatorname{sen} [B (t - t_0)] - R e^{-\delta (t - t_0)} (\dot{x}_0 + D) \cdot \cos [\omega (t - t_0)] +$$

$$+ R e^{-\delta (t - t_0)} (E + G) \operatorname{sen} [\omega (t - t_0)] + R D \cos [B (t - t_0)] \Big] \cdot$$

$$\cdot \Big[e^{-\delta (t - t_0)} (\dot{x}_0 + D) \cos [\omega (t - t_0)] - e^{-\delta (t - t_0)} (E + G) \operatorname{sen} [\omega (t - t_0)] -$$

$$- D \cos [B (t - t_0)] + A \operatorname{sen} [B (t - t_0)] \Big] \, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2} (F_{01} - 2 R A) (\dot{x}_0 + D) e^{-\delta (t - t_0)} \Big[\operatorname{sen} [(B + \omega) (t - t_0)] + \operatorname{sen} [(B - \omega) \cdot (t - t_0)] \Big] dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2} (F_{01} - 2 R A) (E + G) e^{-\delta (t - t_0)} \Big[\cos [(B - \omega) (t - t_0)] - \cos [(B + \omega) (t - t_0)] \Big] dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2} (F_{01} - 2 R A) D \operatorname{sen} [2 B (t - t_0)] \, dt +$$

$$+\int_{to}^{t} (F_{01}\ A + R\,D^2 - R\,A^2)\ \mathrm{sen}^2\,[\,B\,(t-t_0)\,]\ dt - \int_{to}^{t} R\,D^2\ dt -$$

$$-\int_{to}^{t} [\,R\,(\dot{x}_0 + D)^2 - R\,(E+G)^2\,]\ e^{-2\,\delta\,(t-t_0)} \cos^2\,[\,\omega\,(t-t_0)\,]\ dt -$$

$$-\int_{to}^{t} R\,(E+G)^2\ e^{-2\,\delta\,(t-t_0)}\,dt + \int_{to}^{t} R\,(\dot{x}_0 + D)\,(E+G)\ e^{-2\,\delta\,(t-t_0)}\ \mathrm{sen}\,[\,2\,\omega\,(t-t_0)\,]\ dt +$$

$$+\int_{to}^{t} R\,(\dot{x}_0 + D)\,D\ e^{-\delta\,(t-t_0)}\,[\cos\,[\,(B+\omega)\,(t-t_0)\,] + \cos\,[\,(B-\omega)\,(t-t_0)\,]\,]\ dt -$$

$$-\int_{to}^{t} R\,(E+G)\,D\ e^{-\delta\,(t-t_0)}[\,\mathrm{sen}\,[\,(B+\omega)\,(t-t_0)\,] - \mathrm{sen}\,[\,(B-\omega)\,(t-t_0)\,]\,]\ dt =$$

$$= \left\{ \left[-\frac{1}{2}\,(F_{01} - 2\,AR)\,(\dot{x}_0 + D) + R\,(E+G)\,D \right] \frac{\delta}{(B+\omega)^2 + \delta^2} + \left[R\,(\dot{x}_0 + D)\,D + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\,(F_{01} - 2\,AR)\,(E+G) \right] \frac{B+\omega}{(B+\omega)^2 + \delta^2} \right\} e^{-\delta\,(t-t_0)}\ \mathrm{sen}\,[\,(B+\omega)\,(t-t_0)\,] +$$

$$+ \left\{ \left[-\frac{1}{2}\,(F_{01} - 2\,AR)\,(\dot{x}_0 + D) + R\,(E+G)\,D \right] \cdot \frac{B+\omega}{(B+\omega)^2 + \delta^2} + \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{1}{2}\,(F_{01} - 2\,AR)\ E+G) - R\,(\dot{x}_0 + D)\,D \right] \frac{\delta}{\delta^2 + (B+\omega)^2} \right\} e^{-\delta\,(t-t_0)} \cos\,[(B+\omega)\,(t-t_0)\,] +$$

$$+ \left\{ \left[-\frac{1}{2}\,(F_{01} - 2\,AR)\,(\dot{x}_0 + D) - R\,(E+G)\,D \right] \frac{\delta}{(B-\omega)^2 + \delta^2} + \left[-\frac{1}{2}\,(F_{01} - 2\,AR)\,(E+G) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + R\,(\dot{x}_0 + D)\,D \right] \frac{B-\omega}{(B-\omega)^2 + \delta^2} \right\} e^{-\delta\,(t-t_0)}\ \mathrm{sen}\,[\,(B-\omega)\,(t-t_0)\,] +$$

$$+ \left\{ \left[-\frac{1}{2}\,(F_{01} - 2\,AR)\,(\dot{x}_0 + D) - R\,(E+G)\,D \right] \frac{B-\omega}{(B-\omega)^2 + \delta^2} + \left[\frac{1}{2}\,(F_{01} - 2\,AR)\,(E+G) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - R\,(\dot{x}_0 + D)\,D \right] \frac{\delta}{(B-\omega)^2 + \delta^2} \right\} e^{-\delta\,(t-t_0)} \cos\,[\,(B-\omega)\,(t-t_0)\,] +$$

$$+ \frac{1}{2}\,(F_{01} - 2\,AR)\,(D + \dot{x}_0)\,\frac{2\,B\,(B^2 - \omega^2 + \delta^2)}{(B^2 - \omega_0^2)^2 + 4\,\delta^2\,B^2} + \frac{1}{2}\,(F_{01} - 2\,AR)\,(E+G)\,\frac{-4\,\delta\,B\,\omega}{(B^2 - \omega_0^2)^2 + 4\,\delta^2\,B^2} +$$

$$+ R\,(\dot{x}_0 + D)\,D\,\frac{2\,\delta\,(B^2 + \omega_0^2)}{(B^2 - \omega_0^2)^2 + 4\,\delta^2\,B^2} + R\,(E+G)\,D\,\frac{2\,\omega\,(B^2 - \omega_0^2)}{(B^2 - \omega_0^2)^2 + 4\,\delta^2\,B^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\,[F_{01}\,A - R\,D^2 - R\,A^2]\,(t-t_0) + \frac{1}{4\,B}\,(F_{01} - 2\,A\,R)\,D\,[\cos\,[2\,B\,(t-t_0)\,] - 1] +$$

$$+ \frac{1}{4\,B}\,(-F_{01}\,A - R\,D^2 + R\,A^2)\ \mathrm{sen}\,[2\,B\,(t-t_0)\,] + \left[-R\,(\dot{x}_0 + D)\,(E+G)\,\frac{2\,\delta}{4\,\omega_0^2} - \right.$$

$$\left. - R\,[(\dot{x}_0 + D)^2 - (E+G)^2\,]\,\frac{\omega}{4\,\omega_0^2} \right] \cdot e^{-2\,\delta\,(t-t_0)}\ \mathrm{sen}\,[2\,\omega\,(t-t_0)] +$$

$$+ \left[-R\,(\dot{x}_0 + D)\,(E+G)\,\frac{2\,\omega}{4\,\omega_0^2} + R\left[(\dot{x}_0 + D)^2 - (E+G)^2\,\frac{\delta}{4\,\omega_0^2} \right] \right. \cdot$$

$$\cdot \left[e^{-2\,\delta\,(t-t_0)} \cos\,[2\,\omega\,(t-t_0)] - 1 \right] + (E+G)^2 + \frac{1}{2\,\delta}\left[e^{-2\,\delta\,(t-t_0)} - 1 \right]$$

$$U - U_0 = e^{-\delta(t-t_0)} \Big[C_1 \operatorname{sen}[(B+\omega)(t-t_0)] + C_2 \cos[(B+\omega)(t-t_0)] + C_3 \operatorname{sen}[(B-\omega)(t-t_0)]$$

$$+ C_4 \cos[(B-\omega)(t-t_0)] \Big] + C_5 + C_6 (t-t_0) + C_7 [\cos[2B(t-t_0)] - 1] +$$

$$+ C_8 \operatorname{sen}[2B(t-t_0)] + C_9 e^{-2\delta(t-t)} \operatorname{sen}[2\omega(t-t_0)] +$$

$$+ C_{10} \Big[e^{-2\delta(t-t_0)} \cos[2\omega(t-t_0)] - 1 \Big] + C_{11} \Big[e^{-2\delta(t-t_0)} - 1 \Big] \tag{37}$$

Por substituição dos valores de (36) na expressão (34) verifica-se que

$$C_6 = 0 \tag{38}$$

$$C_2 + C_4 = - C_1 \tag{39}$$

o que era de esperar, pois equivale a ser o sistema estável quando $t - t_0 \to \infty$ (38) e a ser $U - U_0 = 0$ quando $t - t_0 = 0$ (39). Virá finalmente

$$U - U_0 = e^{-(t-t_0)} \{ -(C_2 + C_4) \operatorname{sen}[(B+\omega)(t-t_0)] + C_2 \cos[(B+\omega)(t-t_0)] +$$

$$+ C_3 \operatorname{sen}[(B-\omega)(t-t_0)] + C_4 \cos[(B-\omega)(t-t_0)] \} + C_5 +$$

$$+ C_7 [\cos[2B(t-t_0)] - 1] + C_8 \operatorname{sen}[2B(t-t_0)] +$$

$$+ C_9 e^{-2\delta(t-t_0)} \operatorname{sen}[2\omega(t-t_0)] + C_{10} e^{-2\delta(t-t_0)} [\cos[2\omega(t-t_0)] - 1] +$$

$$+ C_{11} [e^{-2\delta(t-t_0)} - 1] \tag{40}$$

Poderemos analisar melhor a expressão (40) determinando valores por saltos Δt que sejam múltiplos simultaneamente dos períodos de oscilação própria $\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$ e forçada $\left(\frac{2\pi}{B}\right)$. Portanto

$$\Delta t = n_1 \frac{2\pi}{B} = n_2 \frac{2\pi}{\omega} =$$

$$= (n_1 - n_2) \frac{2\pi}{B-\omega} = (n_1 + n_2) \frac{2\pi}{B+\omega} =$$

$$= 2 n_1 \frac{2\pi}{2B} = 2 n_2 \frac{2\pi}{2\omega}$$

em que n_1 e n_2 são inteiros, e portanto $n_1 - n_2$, $n_1 + n_2$, $2 n_1$ e $2 n_2$ também o são (*).

Fazendo então

$$t - t_0 = n \Delta t$$

virá

$$U - U_0 \Big|_{t - t_0 = n\Delta t} = e^{-\delta . n . \Delta t} [C_2 + C_4] + C_5 + \Big[e^{-2\delta . n . \Delta t} - 1 \Big] . [C_{10} + C_{11}] \tag{41}$$

(*) Se $\frac{B}{\omega}$ for irracional, é evidente que não haverá dois inteiros que satisfaçam a relação, mas podemos supor a sua existência com uma aproximação tão grande quanto quisermos.

Em regime permanente $(n \to \infty)$

$$U - U_0 = C_5 - C_{10} - C_{11} = \Delta U \tag{42}$$

ΔU será positivo, nulo ou negativo consoante a energia potencial inicial é maior, igual ou menor que a energia potencial em regime permanente. Se o sistema parte do repouso $U_0 = 0$ e $\Delta U > 0$. Se for perturbado de início por acções do tipo Dirac ou «Step» $U_0 \neq 0$ e $\Delta U \gtrless 0$. A expressão (4) poderá ser parcialmente demonstrada se tomarmos como $\dot{x}$ a velocidade do sistema em regime permanente (28):

$$U - U_0 = \int_{t_0}^{t} [F_{01} \operatorname{sen} [B(t - t_0)] - R\dot{x}]\, \dot{x}\, dt =$$

$$= \frac{\left(\frac{F_{01}}{m}\right)^2 R\,(B^2 - \omega_0^2)^2}{2\,[(B^2 - \omega_0^2)^2 + 4\,\delta^2 B^2]} \left| - B \operatorname{sen} [2B\,(t - t_0)] + \frac{(B^2 - \omega_0^2)}{8\,\delta} [\cos [2B\,(t - t_0)] - 1] \right| \tag{43}$$

e nos mesmos intervalos considerados

$$\Delta U = 0$$

Note-se que só se demonstra com as expressões (41), (42) e (43) qual o balanço energético nos momentos correspondentes a $t - t_0 = n \,.\, \Delta t$ sem atender às flutuações que sabemos existir nos momentos intermédios.

A simples observação da expressão (40) garante estabilidade. Com efeito basta verificar que na expressão (40) $[U - U_0]$ é limitado superiormente.

1.5 CONCLUSÃO

Como se verifica, o problema da vibração de sistemas lineares com um grau de liberdade foi resolvido por integração directa da equação diferencial. Não houve a preocupação de definir características e estudar atributos que, alongando demasiadamente este trabalho, em nada o enriqueceriam, uma vez que são correntemente apresentados nas obras da especialidade.

Deixamos para um trabalho posterior a aplicação do método agora proposto, a sistemas com mais de um grau de liberdade.

* * *

AGRADECIMENTO

Cremos ser pertinente insistir em agradecer deste modo os valiosos conselhos e principalmente o calor dos incentivos transmitidos pelo Ex.mo Professsor do I. S. T., Eng.º Gouvêa Portela.

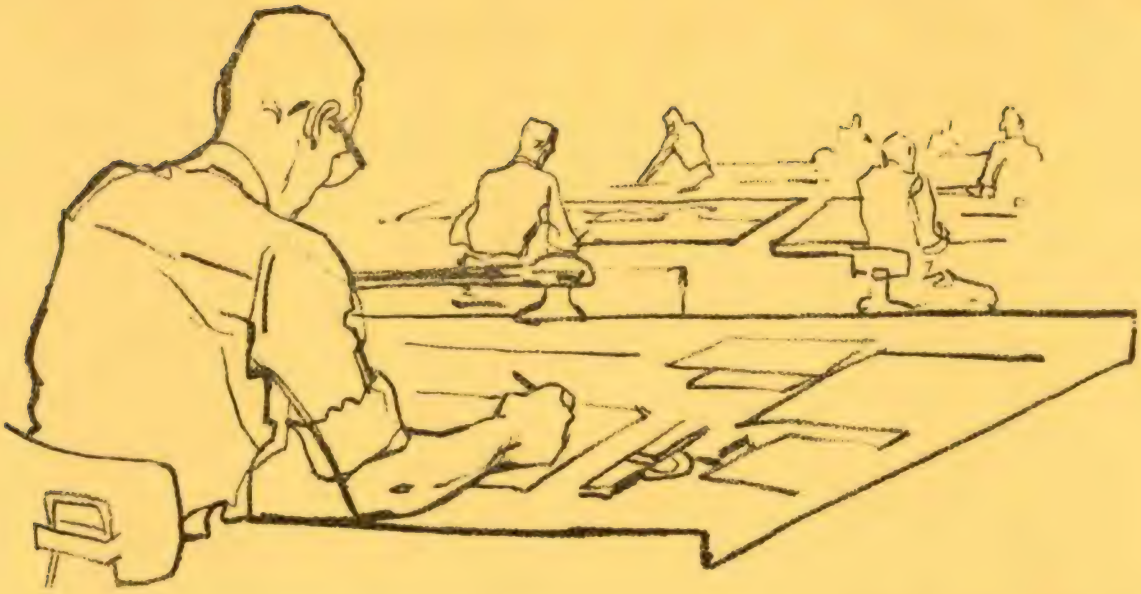
BIBLIOGRAFIA

— Gouvêa Portela — Folhas de Máquinas Alternativas I — Ed. da A. E. I. S. T., Lisboa.
— A. Angot — Compléments de Mathématiques — Ed. Revue d'Optique, Paris.
— F. R. Gantmacher — The Theory of Matrices, vol. I e II — Chelsea Publishing Company, N. Y.
— Den Hartog — Vibrations Mécaniques — Dunod, Paris.
— L. Jacobsen e R. Ayre — Engineering Vibrations — Mc Graw-Hill Book Company, Inc, N. Y.

RESUMÉ

On presente les soluctions usuelles des systèmes vibratoires avec un degré de liberté et de caractéristiques lineaires, en trouvant immediatement avec toute generalité des resultats, pour intégration par aproximations successives de l'équation differentielle correspondante.

APA



CATERPILLAR* + S.T.E.T.

O BINÓMIO MAIS VANTAJOSO PARA QUALQUER PROBLEMA DE MOVIMENTAÇÃO DE TERRAS

CATERPILLAR* O fabricante mais especializado, em todo o mundo, de tractores de rasto e de rodas, pás mecânicas de rasto e rodas (traxcavators*), motoniveladoras, moto-scrapers, escarificadores, "bulldozers", motores industriais e marítimos, grupos electrogéneos.

S.T.E.T. **SOCIEDADE TECNICA DE EQUIPAMENTOS E TRACTORES, S.A.R.L.**

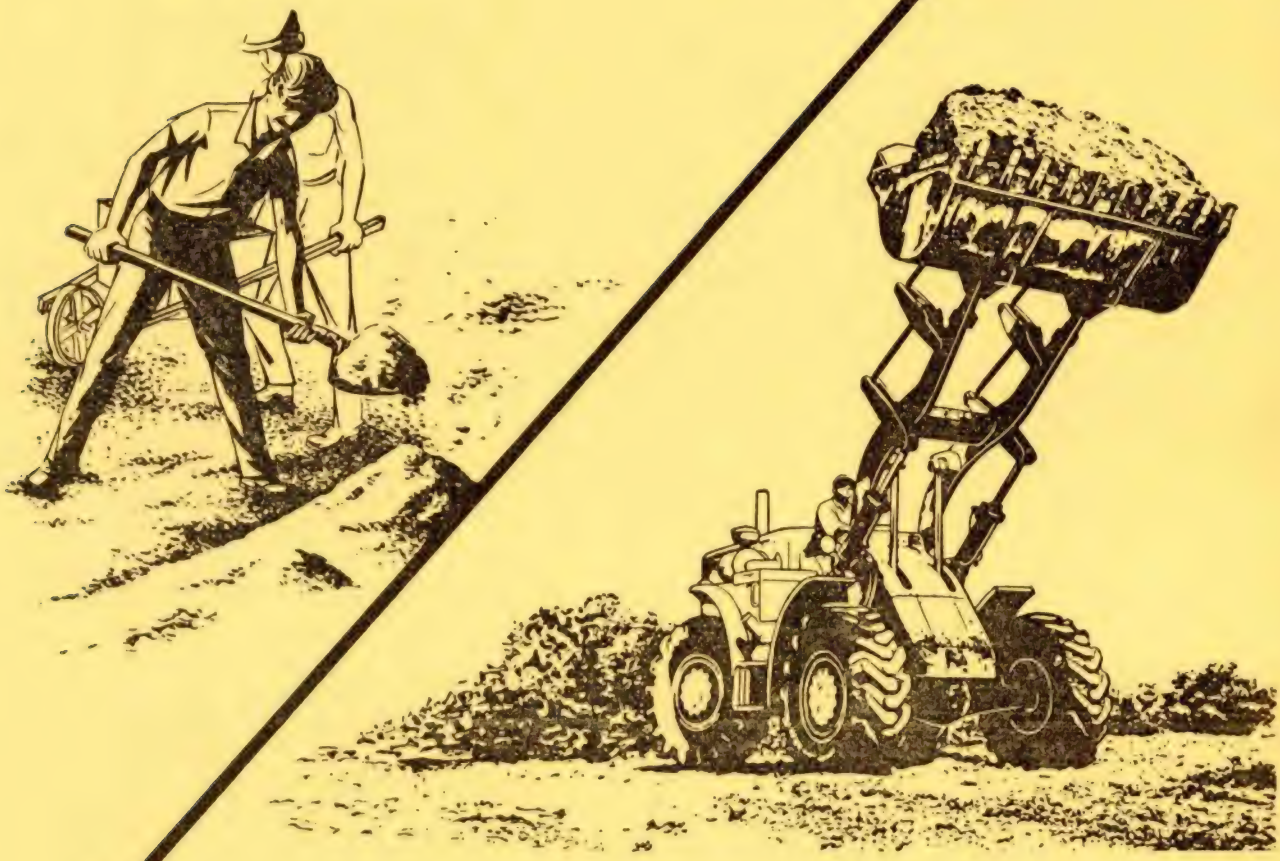
DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO EM PORTUGAL CONTINENTAL, ILHAS ADJACENTES, CABO VERDE E GUINÉ

ASSISTÊNCIA — REPARAÇÕES — PEÇAS GENUÍNAS

PRIOR VELHO — SACAVÉM
TELEF.: 251 0001/4 — TELEG.: «STETRA» — APARTADO 1351
LISBOA

* «CATERPILLAR» E «TRAXCAVATOR» SÃO MARCAS REGISTADAS DE CATERPILLAR TRACTOR CO. — PEORIA, ILLINOIS — E. U. A.

DA PÁ
CLÁSSICA
E DO CARRINHO
DE MÃO...



...À
PÁ MECÂNICA
(TRAXCAVATOR*)
CATERPILLAR*

TODO UM CAMINHO PERCORRIDO NA PROCURA DA MELHOR REALIZAÇÃO DO TRABALHO — DA MANEIRA MAIS EFICIENTE, MAIS ECONÓMICA E MAIS LUCRATIVA — PARA UMA MELHOR SATISFAÇÃO DAS NECESSIDADES HUMANAS.

ACTUALMENTE, EM QUALQUER TRABALHO DE

cerâmicas, minas e pedreiras,

A PALAVRA DA ORDEM É

CATERPILLAR*

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO:

S.T.E.T.

SOCIEDADE TÉCNICA DE EQUIPAMENTOS E TRACTORES, S.A.R.L.
PRIOR VELHO — SACAVÉM
TELEF. 251 0001/4 — TELEG. «STETRA» — APARTADO 1351 — LISBOA

* «CATERPILLAR» E «TRAXCAVATOR» SÃO MARCAS REGISTADAS DE CATERPILLAR TRACTOR CO. — PEORIA, ILLINOIS — E. U. A.

C. D. U. 532.542.1:621.181.021

Estabilidade e repartição dos escoamentos em superfícies de aquecimento com circulação forçada

POR JOSÉ JOAQUIM DELGADO DOMINGOS
Eng.º Mecânico
Assistente do I. S. T.

0 — Introdução

O conhecimento da estabilidade do escoamento numa superfície de aquecimento é problema importante na sua realização industrial e assume especial relevo em caldeiras e reactores nucleares especialmente nas superfícies evaporatórias.

As superfícies são usualmente realizadas por circuitos tubulares em paralelo, e o problema tem sido extensamente tratado sobretudo quanto à estabilidade do escoamento, usando modelos físicos que permitem um estudo analítico simples. Este é essencialmente de valor metodológico, porque o cálculo usual é feito numèricamente, e por troços. Usando-se frequentemente o computador electrónico o tratamento usual do problema, não só não considera as potencialidades deste novo processo de cálculo, como descura em geral o problema da repartição dos escoamentos, entre os vários circuitos individuais limitando-se a determinar a estabilidade dessa repartição.

No presente trabalho procura-se considerar ambos os aspectos, no âmbito duma teoria não vinculada a um modelo físico particular, o que permitirá um cálculo prático tanto melhor quanto mais próximo da realidade for o modelo escolhido, e independentemente de o mesmo se traduzir ou não por expressão analítica simples.

Para tal introduzem-se coeficientes, calculáveis por métodos numéricos, que caracterizam o efeito da variação dos factores importantes.

Em trabalho posterior será exemplificada a sua aplicação prática, e dar-se-á conta dos modelos usualmente propostos o que permitirá testar a melhoria que se apresenta.

1 — Proposição do método

O escoamento em pressão num circuito onde se verifica o aquecimento dum fluido que pode sofrer mudança de fase pode em geral ser expresso sob forma diferencial em função das variáveis definidoras do seu conteúdo energético específico e das coordenadas espaciais. A introdução das condições iniciais e aos limites permite formalmente a descrição da evolução do sistema.

No presente caso interessam-nos apenas os regimes estacionários. De igual modo é suficiente uma descrição segundo uma linha média do escoamento. Introduzindo valores médios no espaço (e no tempo), admitiremos que a integração das equações conduzirá ao conhecimento da perda de carga ΔP entre as extremidades do tubo, em função das restantes variáveis definidoras do estado do sistema, de entre as quais se individualiza o caudal mássico G.

Admitimos pois que se obtém:

$$\Delta P = \varphi\,(G, x_1 \ldots x_n)$$

ou

$$f\,(\Delta P, G, x_1 \ldots x_n) = 0$$

que define univocamente ΔP.

Dado o seu carácter físico admite-se ainda que $\varphi\,(G, x_1 \ldots x_n) = 0$ e suas derivadas são contínuas, salvo num conjunto numerável de pontos de descontinuidade removível, de forma que a função pode ser desenvolvida em série de Taylor.

Além disso ΔP existe, tal como todas as variáveis no domínio real, e verifica-se que:

$$\Delta P\ (G = 0) = 0\ ; \quad G > 0 \quad \Delta P > 0$$

1.1 — A função $f\,(\Delta P, G, x_1 \ldots x_n) = 0$ representa uma superfície num espaço afim a $n + 2$ dimensões e cada ponto desta superfície define completamente o escoamento num circuito. O seu conhecimento permitirá resolver todos os problemas relativos à associação de vários circuitos, conhecidos um certo número de variáveis que individualmente os caracterizam.

Designando por a_{jk} os valores da variável x_k impostos ao circuito j este passa a ser definido por

$$f_j\ (\Delta P_j\,,\ G_j\,,\ x_{j1}\,,\ \ldots\ x_{j\,,\,n-k}\,) = 0$$

reduzindo-se deste modo a descrição a um espaço $n + 2 - k$ dimensões.

A cada parametrização corresponde uma redução do espaço de descrição que se reduz a zero quando o escoamento é completamente definido.

1.2 — *Estabilidade de escoamento num circuito individual*

Sejam $x_1 = a_1 \ldots x_n = a_n$ os parâmetros que definem o circuito e $P^x = P^x\ (G)$ a característica da bomba que o alimenta. Seja P_l^x a pressão à saída e $\Delta P^x = P^x - P_l^x = \psi\ (G)$.

Os possíveis pontos de equilíbrio do sistema são dados por:

$$\begin{cases} \Delta P^x = \psi\ (G) & (1) \\ f\ (G,\ \Delta P,\ a_1 \ldots a_n) = 0 & (2) \\ \Delta P = \Delta P^x & (3) \end{cases}$$

Por hipótese (2) define univocamente ΔP, pelo que eliminando-o entre 1, 2, 3, resulta

$$\varphi\ (G,\ a_1 \ldots a_n) = \psi\ (G)$$

que é uma equação em G que terá em geral mais de uma raiz.

Como as variáveis só se definem no domínio real e $G > 0$ só têm realidade as soluções reais e positivas. Estas fornecem as condições necessárias de equilíbrio do sistema.

Sejam $G_1 \ldots G_r$ essas raízes.

Para que nesse ponto o equilíbrio exista e seja estável é necessário que para uma perturbação ΔG seja

$$(4) \qquad \Delta G\ [\ \varphi\ (G_r + \Delta G) - \psi(G_r + \Delta G)\ ] > 0$$

o que equivale a exprimir que no ponto considerado a variação de energia mecânica fornecida ao fluido pela bomba é menor do que a variação da energia dissipada pelo fluido.

A condição (4) exprime-se fàcilmente desenvolvendo φ e ψ em série de Taylor:

$$(5) \qquad \Delta G\ [\ \varphi\ (G_r + \Delta G) - \psi(G_r + \Delta G)\ ] =$$

$$= \left[\frac{\partial \varphi}{\partial G} - \frac{\partial \psi}{\partial G}\right]_{Gr} \cdot \Delta G^2 + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial G^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial G^2}\right]_{Gr} \Delta G^3 + \ldots$$

e conclui-se que para que o ponto de equilíbrio exista e seja estável é suficiente que o primeiro termo da série não nulo seja de ordem ímpar e positivo.

Pràticamente, exige se nas aplicações que a estabilidade seja determinada pelo primeiro termo.

1.2.1 — A condição de estabilidade determina o número de pontos de equilíbrio estável que poderão ser em número $n \geqslant 1$. Se $n > 1$ e o sistema estiver fora dum ponto de equilíbrio o algoritmo anterior não permite saber qual o ponto estável para que o regime tende. Esta indeterminação não é geralmente aceitável em condições de funcionamento real de uma superfície de aquecimento.

Existindo soluções do sistema de equações, a condição suficiente para que $n = 1$ é

$$(6) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial G} > \frac{\partial \psi}{\partial G}$$

em todo o domínio.

Pràticamente exige-se que (6) se verifique em todo o domínio de funcionamento de uma superfície de aquecimento. Subentende-se por isso que quando se afirma genèricamente a estabilidade se realiza esta condição.

A relação (6), põe em evidência a característica da bomba. Em particular interessa notar que se $\frac{\partial \varphi}{\partial G}$ é finito o escoamento é sempre estável se $\frac{\partial \psi}{\partial G} = -\infty$, sempre instável se $\frac{\partial \psi}{\partial G} = +\infty$. A existência dos dois casos simultâneamente não tem realidade prática, porque a característica duma bomba real não tem pontos de descontinuidade infinita.

O caso mais favorável é pràticamente realizado por uma bomba puramente volumétrica, que é aliás a solução frequente quando uma bomba alimenta um só tubo.

É frequente na literatura considerar apenas o caso de ser $\frac{\partial \psi}{\partial G} = 0$. Nestas condições, para que (6) se verifique e o escoamento seja sempre estável é apenas necessário que ΔP seja monotònicamente crescente com G. O caso em que fosse num ponto $\frac{\partial \varphi}{\partial G} = 0$ é um simples caso particular de (5).

1.2.2 — Na análise anterior definiram-se as condições para que um ponto ΔP_o, G_o, $a_1 \dots a_n$, solução do sistema de equações 1, 2, 3, fosse de equilíbrio estável. Tem porém interesse considerar a influência no deslocamento desse ponto da variação de um dos parâmetros. Este aspecto pode sempre considerar-se repetindo a análise anterior para o novo valor do parâmetro. Tal envolve porém, pràticamente, bastante labor, dado que as soluções são geralmente obtidas por análise numérica. O problema resolve-se mais directamente, especialmente quando as variações do parâmetro são pequenas, usando a teoria das funções implícitas na região de estabilidade que contém o ponto de partida considerando o parâmetro como uma variável.

Suponhamos pois que o parâmetro que pode variar é a_r e façamos $a_r = x$, sendo $(\Delta P_o, G_o, a_1 \dots x_o \dots a_n)$ o ponto de equilíbrio inicial.

O sistema de equações 1, 2, 3, escreve-se, explicitando x

$$\Delta P = \varphi\,(G, x, a_1 \dots a_{r-1}, a_{r+1}, a_n)$$
$$\Delta P^x = \psi\,(G)$$
$$\Delta P = \Delta P^x$$

ou eliminando ΔP^x

$$(7) \qquad \Delta P - \psi\,(G) = F_1\,(\Delta P, G) = 0$$
$$(8) \qquad \Delta P - \varphi\,G, x) = f_1\,(G, x) = 0$$

e o sistema define implìcitamente $G = G\,(x)$ e $\Delta P = \Delta P\,(x)$ pois por hipótese (1)

$$(9) \qquad \frac{\partial\,(F_1, f_1)}{\partial\,(G\ \Delta P)} = D \neq 0$$

No novo ponto de equilíbrio será

$$(10) \quad \Delta P = \Delta P_o + \left(\frac{d\Delta P}{dx}\right)_{xo} \Delta x + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2\Delta P}{dx^2}\right)_{xo} \Delta x^2 + \dots$$

$$(11) \quad G = G_o + \left(\frac{dG}{dx}\right)_{xo} \Delta x + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2G}{dx^2}\right)_{xo} \Delta x^2$$

e como supomos Δx pequeno, podemos desprezar os termos de 2.ª ordem.

Teremos:

$$(12) \quad \frac{d\Delta P}{dx} = \frac{\dfrac{\partial\,(F_1, f_1)}{\partial\,(G, x)}}{D} = -\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial\psi}{\partial G}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial G} - \dfrac{\partial\psi}{\partial G}}$$

(1) Considera-se tal como no que se segue que o 1.º termo não nulo em 5, é o primeiro. Como o ponto é de equilíbrio estável será pois $D > 0$, nesse ponto. Além disso, supondo-se que a perturbação não afecta a estabilidade será $D > 0$ em todo o domínio G, ΔP, x, $a_1 \dots a_n$, de funcionamento.

$$(13) \quad \frac{dG}{dx} = \frac{\dfrac{\partial\,(F_1, f_1)}{\partial\,(x, \Delta P)}}{D} = -\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial G} - \dfrac{\partial\psi}{\partial G}}$$

e o efeito duma perturbação será tanto menor quanto maior

$$D = \frac{\partial\varphi}{\partial G} - \frac{\partial\psi}{\partial G}$$

e quanto menor

$$\frac{\partial\psi}{\partial G} \quad \text{e} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

que interessa exprimir adimensionalmente em ordem a definir um critério comparativo.

Deste modo definimos:

$\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial G} - \dfrac{\partial\psi}{\partial G}\right) \cdot \dfrac{G}{\Delta P} = S$ coeficiente de estabilidade do escoamento

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial G} \cdot \dfrac{G}{\Delta P} = S_c$ — coeficiente de estabilidade do circuito

$\dfrac{G}{\Delta P}\ \dfrac{\partial\psi}{\partial G} = S_b$ — coeficiente de instabilidade da bomba

$\left|\dfrac{x}{\Delta P}\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right| = S_r$ coeficiente de perturbação relativa ao parâmetro r

Para que um escoamento seja estável é condição suficiente que $S > 0$ ou $S_c > S_b$.

E o efeito duma perturbação é tanto menor quanto maior S e menor S_b e S_r.

1.2.2.1 — É frequente na literatura [1] caracterizar um escoamento pelo coeficiente S_c, o que corresponde òbviamente a um aspecto restrito.

Se $S_b = 0$, tratando-se dum escoamento isotérmico, e para valores muito elevados do número de Reynolds é aproximadamente

$$\Delta P = k\,G^2$$

donde $\qquad S = 2$

E é recomendado em [2] que em qualquer circuito aquecido, deve ser $S > 1$ para que a diferença máxima na repartição de escoamentos havendo circuitos em paralelo ainda seja aceitável.

Cita-se o valor como regra prática para tubos economizadores-vaporizadores de caldeiras, a título exemplificativo, dado o carácter restrito da conclusão e das condições em que é válida como se verá quando se tratar de circuitos em paralelo.

A conclusão geral é que $S > 0$ para que o escoamento seja estável, no ponto de funcionamento dado. Se $S_b = 0$ será em geral $S < 2$, num circuito aquecido.

1.3 — *Repartição dos escoamentos em circuitos em paralelo quando os colectores não introduzem perda de carga*

Seja de novo $F_1 = \Delta P^x - \psi(G)$ e a_{ij} os parâmetros que definem os j ($j = 1 \ldots m$) circuitos individuais.

Os pontos que forem de equilíbrio são soluções de

$$(14) \quad F_1 = \Delta P^x - \psi(G) = 0$$

$$(15) \quad F_2 = G - \sum_1^m G_j = 0$$

$$(16) \quad f_j = \Delta P_j - \varphi(G_j, a_{ij}) \qquad j = 1 \ldots m$$

$$(17) \quad \Delta P = \Delta P^x \qquad i = 1 \ldots n$$

e tal como anteriormente só podem ser pontos de equilíbrio de raizes reais e positivas, que por hipótese supomos existirem. A estas podem corresponder pontos de equilíbrio estável ou instável.

Suponhamos que para cada um dos pontos (G, G_i, ΔP) solução de 15 e 16 com $\Delta P_j = \Delta P$ é

$$(18) \quad \frac{\partial(F_2, f_1 \ldots f_m)}{\partial(G, G_1 \ldots G_m)} \neq 0$$

então o sistema define $G = \phi(\Delta P)$ que é a equação dum circuito único equivalente aos circuitos em paralelo.

Calculando o jacobiano (18) atendendo a 14, 15, 16 e 17 verifica-se que

$$\frac{\partial(F_2, f_1 \ldots f_m)}{\partial(G, G_1 \ldots G_m)} = \prod_1^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial G_j}$$

para que (18) se verifique é necessário que

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial G_j} \gtrless 0$$

para todos os j ($j = 1 \ldots m$)

Mas se para alguns dos circuitos é $\frac{\partial \varphi_r}{\partial G_r} < 0$ ($r \leqslant m$) tal significa que nos circuitos individuais r, o ponto é de equilíbrio instável, donde o sê-lo para o circuito global em paralelo.

Para que o escoamento seja estável é pois necessário que

$$(19) \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial G_j} > 0$$

o que reduz o problema da estabilidade no paralelo ao dos circuitos individuais alimentados por uma bomba de características $\psi = \text{const}$. Deste facto o interesse de conhecer S_{jc}, para cada tubo.

Verificando-se (18) é

$$(20) \quad \frac{d\Delta P}{dG} = \frac{1}{\sum_j \frac{1}{\frac{\partial \varphi_j}{\partial G_j}}}$$

e verificando-se (19) o escoamento global é estável, e o coeficiente de estabilidade do paralelo, é o do circuito global equivalente:

$$S = \left[\frac{1}{\sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial G_j}} - \frac{\partial \psi}{\partial G} \right] \cdot \frac{G}{\Delta P}$$

1.3.1 — Verificando-se (18) e (19), existe um circuito global equivalente que é estável. Neste caso, o sistema de equações 14, 15, 16, 17 define a repartição dos escoamentos no ponto de equilíbrio.

Interessa considerar de novo o efeito duma perturbação num parâmetro dum dos circuitos individuais naquela repartição, além do seu efeito no escoamento global mantendo-se ainda estável o escoamento [1]. O problema trata-se como em 1.2, mas repete-se por forma a incluir aquele como um caso particular das expressões obtidas.

Seja o sistema de equações, cujas soluções contêm todos os pontos de equilíbrio, que se supõe existirem e serem estáveis:

$$(21) \quad F_1 = \Delta P - \psi(G) = 0$$

$$(22) \quad F_2 = G - \sum_1^m G_j = 0$$

$$(23) \quad f_j = \Delta P - \varphi_j(G_j) = 0 \quad (j = 1 \ldots m \neq l)$$

$$(24) \quad f_l = \Delta P - \varphi_l(G_l, x) = 0$$

onde se designa por x o parâmetro a_{rl}, do circuito l, que sofreu uma variação.

O ponto (ΔP_o, G_o, $G_{1o} \ldots G_{mo}$, x_o) é por hipótese de equilíbrio.

Como $\frac{\partial(F_1, F_2, f_1 \ldots f_m)}{\partial(\Delta P, G, G_1 \ldots G_m)} = D > 0$

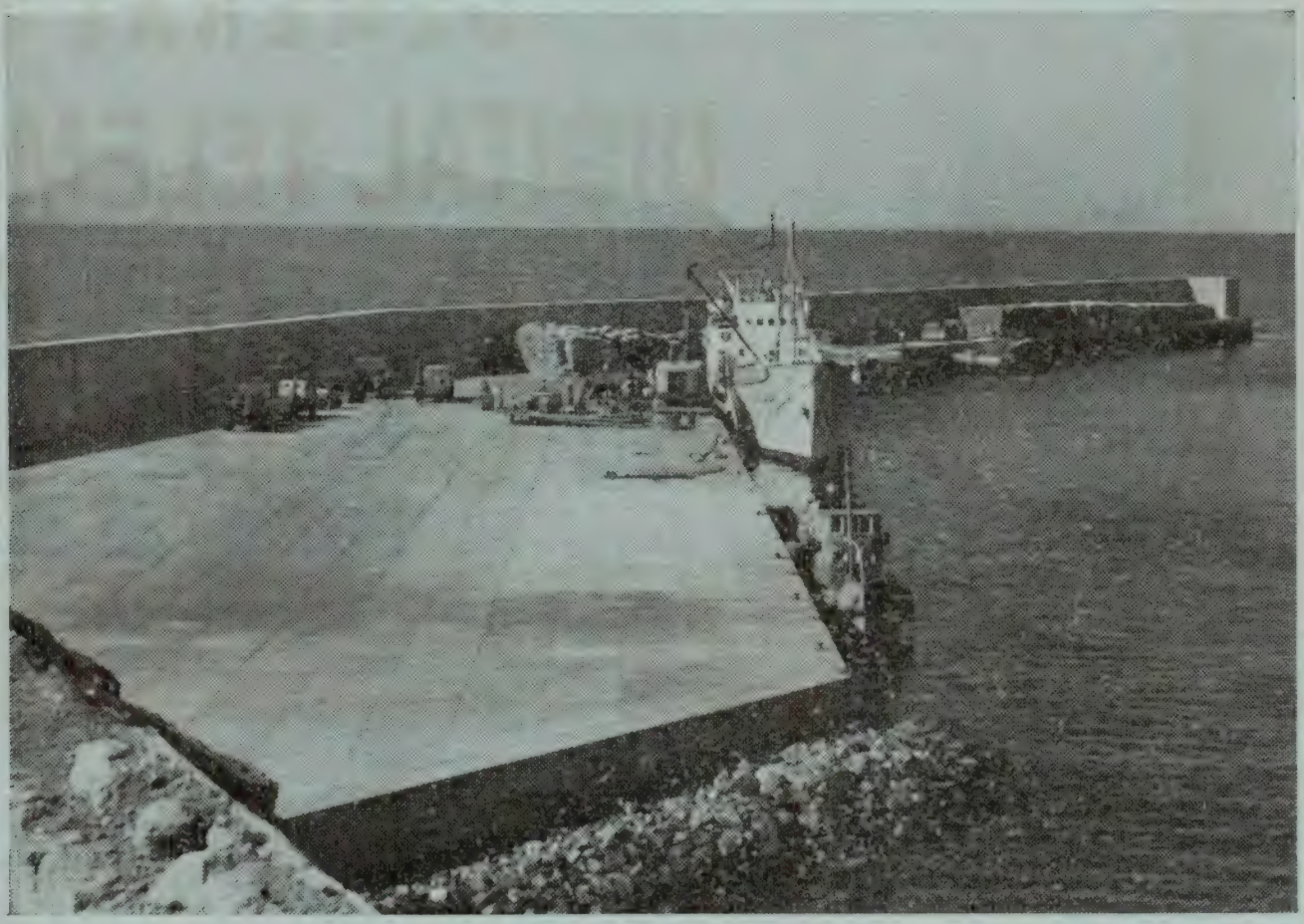
CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

PRAÇA DO MUNICÍPIO, 13 - 3.º - LISBOA - 2

TEL. 36 65 06

SONDAGENS • FUNDAÇÕES • TRABALHOS MARÍTIMOS
PONTES E ESTRUTURAS

OBRAS ACOSTÁVEIS DO PORTO NOVO DE S. ANTÃO
CABO VERDE



ASPECTO GERAL DAS OBRAS

- 250 metros de cais, sendo 130 metros em fundos de (— 7.00)
- 18 grandes caixotões flutuantes de betão armado, construídos em S. Vicente e rebocados para S. Antão.

O reactor de água fervente General Electric tornar-se-á o seu melhor investimento

3 BILIÕES KILOWATTS-HORA

Durante Outubro 1963 cinco centrais com reactores de água fervente General Electric, produziram mais de 3 biliões de kWh, a maior parte nos últimos 30 meses. Em 1968, pelo menos mais 6 reactores G-E do mesmo tipo estarão em actividade produzindo mais do que 16 biliões de kWh.

Falando de experiência — experiência operacional — mostramos as vantagens da simplicidade do desenho do reactor G-E de água fervente, com baixos custos operacionais, fornecimento e manutenção fáceis.

O reactor simples, de ciclo directo precisa de menos material e menos peças auxiliares. Não há permutadores de calor que possam complicar a manutenção do sistema. O vapor é fornecido directamente para a turbina General Electric a 1000 psi e 545° F.

O edifício do reactor é acessível mesmo durante o seu funcionamento. Para simplificar a manutenção do reactor e o seu abastecimento com combustível, a G-E usa um sistema controlado mecânicamente, que torna mais eficiente a utilização de combustível. Segundo a opinião dos operadores da Central Nuclear de Dresden (220,000 kWe) esta central é,

até ao presente, a *melhor* unidade de produção de vapor.

Quando a turbina precisa de ser inspeccionada, a experiência mostra que não há qualquer dificuldade. Logo que a turbina *arrefeceu suficientemente* para se poder trabalhar nela, pode-se fazê-lo sem qualquer receio pois a sua rádio-actividade é *nula*.

Os reactores de água fervente General Electric são presentemente os mais económicos produtores de energia de origem nuclear. A General Electric está oferecendo reactores de água fervente com qualquer capacidade que se pretenda, a preços fixos, e com garantia de fabrico. A General Electric gostaria de ter uma oportunidade de discutir este assunto com os interessados. Contacte a General Electric Portuguesa, Rua do Norte, 5, Lisboa-1, ou escreva para: *International General Electric Company, Dept. 30-32 TC, 159 Madison Avenue, New York, NY 10016, U.S.A.*

Progresso é o Nosso Produto Principal

GENERAL ELECTRIC

U.S.A.

DKM 3

Grande teodolito de triangulação para trabalhos importantes

Construção moderna: Construção compacta, peso reduzido, óculo de lente espelhada de imagem direita, micrómetro óptico de grande precisão, de leitura clara.
Grande precisão: Leitura directa do circulo 0,5cc/0,5", estimativa 0,1cc/0,1".
Emprego múltiplo: Triangulações de 1ª e 2ª ordem, medições de deformação em construções, levantamentos de precisão, determinações astronómicas de azimute, lugar e tempo.

Kern & Co. S.A. Aarau Suiça

Representantes para Portugal:
E. de Azevedo Campos & Cia., Lda.
Rua Santo António, 137, Porto
Rua Antero de Quental, 17, Lisboa

Kern SWISS

Moldes deslizantes sistema

«SIEMCRETE»

CONSTRUÇÃO DE

SILOS
PILARES
CHAMINÉS
RESERVATÓRIOS ELEVADOS
CAIXAS DE ESCADA E DE ELEVADORES

Assistência técnica de SIEMENS - BAUUNION G. m. b. H. (Munique)

Licenciados em exclusivo para Portugal:

AGROMECÂNICA, LDA. — Rua Rodrigo da Fonseca, 62, r/c D. — LISBOA 1

por hipótese, o sistema (21), (22), (23) e (24) define implìcitamente ΔP, G, G_j, em função de (x) na vizinhança do ponto.

Quando x_o passa a $x_o + \Delta x$ o novo ponto de equilíbrio será (1)

$$\Delta P = \Delta P_o + \left(\frac{d\,\Delta P}{d\,x}\right) \Delta x + \ldots$$

$$G = G_o + \left(\frac{d\,G}{d\,x}\right) \Delta x + \ldots$$

$$G_j = G_{j\,o} + \left(\frac{d\,G_j}{d\,x}\right) \Delta x + \ldots$$

em que de novo se consideram apenas os primeiros termos por se supor Δx pequeno.

Será

$$\frac{d\,\Delta P}{d\,x} = \frac{\dfrac{\partial\,(F_1, F_2, f_1 \ldots f_m)}{\partial\,(x, G, G_1 \ldots G_m)}}{D}$$

$$\frac{dG}{dx} = \frac{\dfrac{\partial\,(F_1, F_2, f_1 \ldots f_m)}{\partial\,(\Delta P, x, G_1 \ldots G_m)}}{D}$$

$$\frac{dG_j}{dx} = \frac{\dfrac{\partial\,(F_1, F_2, f_1 \ldots f_m)}{\partial\,(\Delta P, G, G_1 \ldots x \ldots G_m)}}{D}$$

Atendendo a 21, 22, 23 e 24, vem:

$$D = \frac{\partial\,(F_1, F_2, f_1 \ldots f_m)}{\partial\,(\Delta P, G, G_1 \ldots G_m)} =$$

$$= \prod_1^m \left[1 - \frac{\partial \psi}{\partial G} \sum_1^m \frac{1}{\dfrac{\partial \varphi_j}{dG_j}} \right]$$

e será:

$$\frac{\partial\,(F_1, F_2, f_1 \ldots f_m)}{\partial\,(x, G, G_1 \ldots G_m)} =$$

$$= \frac{\partial \varphi_l}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial G} \prod_1^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial G_j} \quad (j = 1 \ldots m \;\; m \neq l)$$

$$\frac{\partial\,(F_1, F_2, f_1 \ldots f_m)}{\partial\,(\Delta P, x, G_1 \ldots G_m)} = \frac{\partial \varphi_l}{\partial x} \prod_1^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial G_j} \quad (j = 1 \ldots m \neq l)$$

e resulta:

$$\frac{d\,\Delta P}{dx} = - \frac{\dfrac{\partial \varphi_l}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi_l}{\partial G_l}} \cdot \frac{1}{\left[\sum_1^m \dfrac{1}{\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial G_j}} - \dfrac{1}{\dfrac{\partial \psi}{\partial G}} \right]}$$

$$\frac{dG}{dx} = - \frac{\dfrac{\partial \varphi_l}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi_l}{\partial G_l}} \cdot \frac{\dfrac{1}{\dfrac{\partial \psi}{\partial G}}}{\left[\sum_1^m \dfrac{1}{\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial G_j}} - \dfrac{1}{\dfrac{\partial \psi}{\partial G}} \right]}$$

$$\frac{dG_k}{dx} = - \frac{\dfrac{\partial \varphi_l}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi_l}{\partial G_l} \cdot \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial G_k}} \times$$

$$\times \frac{1}{\left[\sum_1^m \dfrac{1}{\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial G_j}} - \dfrac{1}{\dfrac{\partial \psi}{\partial G}} \right]} \qquad k = 1 \ldots m \neq l$$

$$\frac{dG_l}{dx} = - \frac{\dfrac{\partial \varphi_l}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi_l}{\partial G_l}} \left[\frac{\dfrac{1}{\dfrac{\partial \psi}{\partial G}}}{\dfrac{\partial \varphi_l}{\partial G_l} \cdot \left(\sum_1^m \dfrac{1}{\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial G_j}} - \dfrac{1}{\dfrac{\partial \psi}{\partial G}} \right)} + 1 \right]$$

1.3.2 — As expressões obtidas generalizam as expressões para um só circuito e permitem definir, anàlogamente, mas com toda a generalidade os coeficientes de estabilidade e de perturbação.

Neste caso, define-se mais o coeficiente de perturbação no escoamento do circuito j por perturbação do parâmetro r no circuito l, como

$$S_{jlr} = \left| \frac{\dfrac{\partial \varphi_l}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi_l}{\partial G_l} \cdot \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial G_j}} \cdot \frac{x}{G} \right| \quad (l \neq j)$$

anàlogamente se definem os restantes coeficientes.

Fàcilmente se verifica a influência da característica da bomba, responsável pela transmissão duma perturbação num circuito aos restantes, donde o aspecto restrito das conclusões que reduzem a análise ao de um circuito isolado.

Como o demonstra a análise anterior, só no caso duma característica ψ (G) = const o efeito duma perturbação se reduz ao circuito individual onde se verifica.

A análise clássica junta a esta simplificação a de que os circuitos são pràticamente iguais, e desconhece o efeito de perturbações que existem sempre num escoamento real. Destas assinála-se como particularmente importante o que se refere ao aquecimento dos circuitos individuais.

2 — Conclusão

A utilização de expressões analíticas no cálculo da estabilidade e da repartição dos escoamentos conduziu clàssicamente à adopção de modelos simplificados, dos quais citaremos o mais usado, em próximo artigo.

Acentua-se porém, que a análise dum caso real não implica para a sua solução o manejo de expressões analíticas complexas, como se poderia induzir duma teoria que pressupõe a existência das várias funções utilizadas.

O cálculo prático é feito numèricamente calculando ΔP, em função de G_i, e fazendo o cálculo por troços. Deste modo e apenas na vizinhança do ponto que corresponde ao regime de interesse se determina o circuito equivalente. No processo usual, determina-se neste ponto S_c, e procura-se que seja superior a um valor mínimo. Se o não for procura-se a sua correcção, de modo que será exemplificado posteriormente.

O cálculo assim feito, que se baseia em modelos simples, torna extremamente complexa e trabalhosa a exploração duma variação nos parâmetros, porque na forma usual de proceder equivale a uma nova determinação do ponto de equilíbrio, ou seja a uma repetição sucessiva do mesmo problema.

O método proposto permite resolver com facilidade o problema das pequenas perturbações em torno de qualquer ponto de equilíbrio, que é muitas vezes o caso importante, e o formulário aplica-se a toda a região onde existe equilíbrio, sem que as suas conclusões estejam vinculadas a um modelo físico particular. Para tal, como é apenas necessário o cálculo de primeiras derivadas, o mesmo efectua-se numèricamente, e o estudo faz-se com toda a generalidade a partir dum número restrito de parâmetros com as relações encontradas.

Dispondo dum computador, o aspecto fastidioso do cálculo é eliminado, e torna-se possível prever a influência de cada perturbação, e com a maior generalidade.

O método responde deste modo às possibilidades dos novos meios do cálculo numérico, e integra imediatamente qualquer melhoria no conhecimento da determinação da perda de carga, sem maior complicação que a que resulta dum calculo numérico por troços.

Agradecimento:

Agradecemos ao Ex.mo Sr. Prof. Gouvêa Portela todo o encorajamento e interesse com que estimulou a realização deste trabalho.

BIBLIOGRAFIA

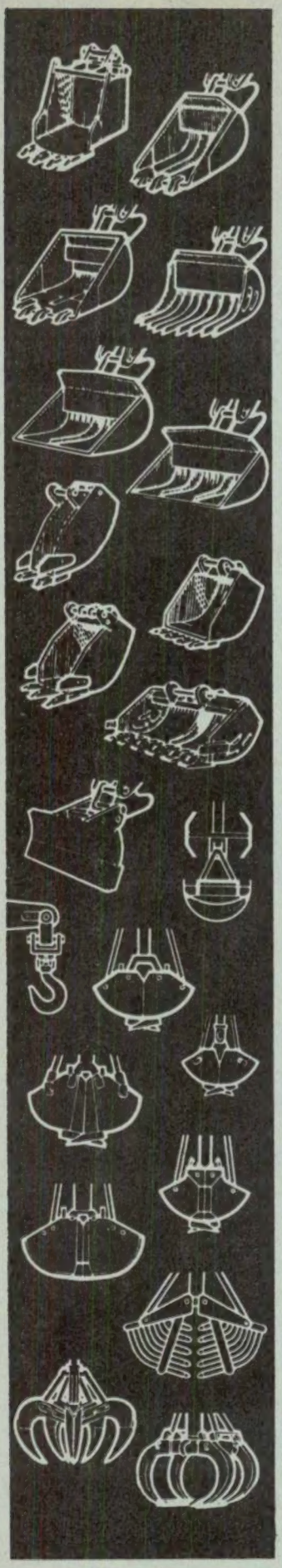
[1] — Dolezǎl — Durchlaufkessel — Vulcan Verlag.
[2] — P. Profos — Die Stabilisierung der Durchflußverteilung in Zwanglaufheizflächen — Energie — 11 — 1959.

RESUMO

Admitindo propriedades muito gerais quanto à dependência da perda de carga das variáveis definidoras do escoamento num circuito aquecido, estabelecem-se as condições de estabilidade num circuito individual e em circuitos em paralelo. Linearizando a função num domínio de estabilidade determina-se a influência da perturbação num dos parâmetros em torno dum ponto de equilíbrio. Introduzem-se critérios adimensionais de estabilidade do circuito, da bomba e da perturbação.

SUMMARY

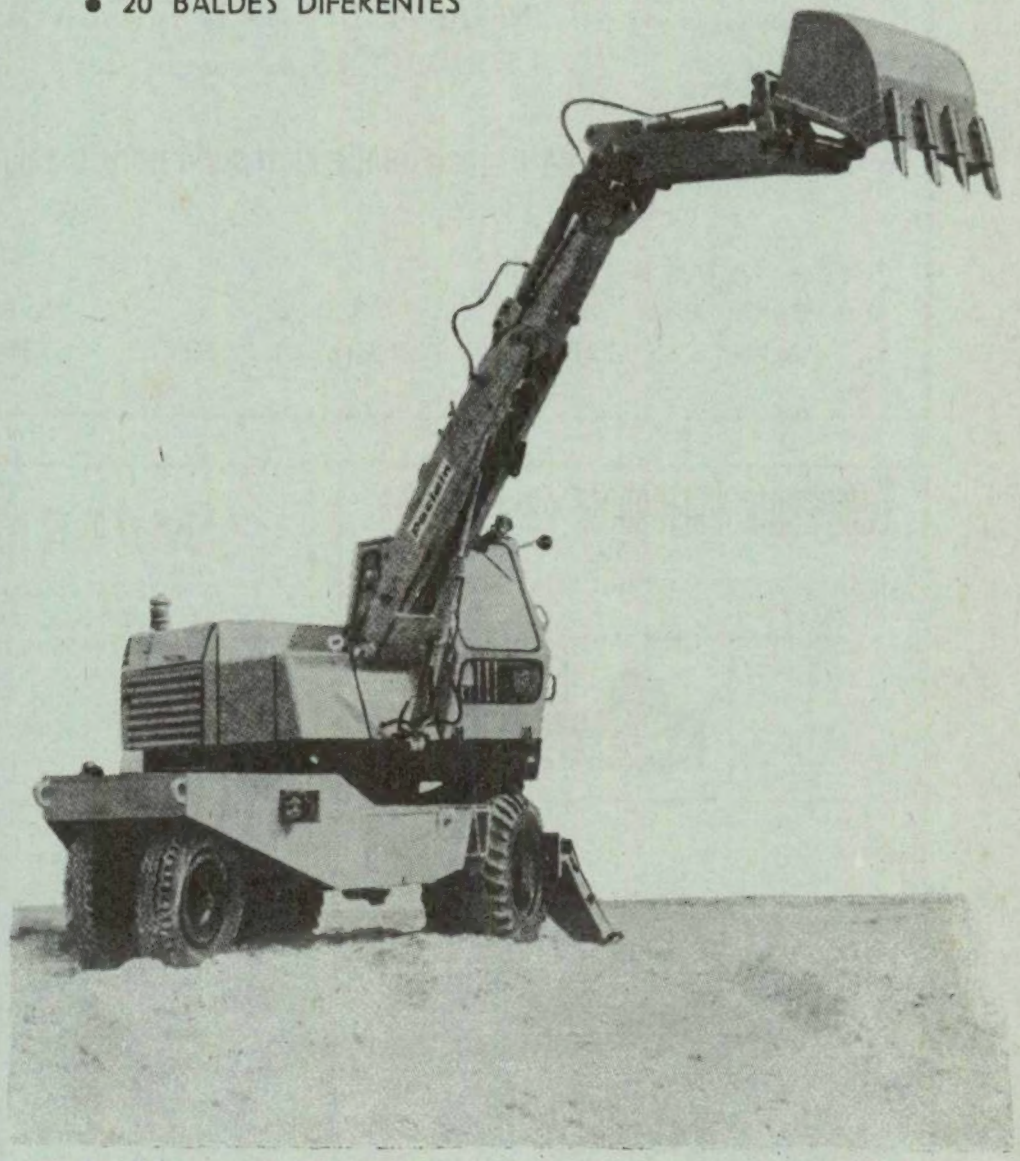
With some general assumptions about functional dependence of pressure drop of a heated tube on the flow variables the conditions for stability of flow on individual and parallel tubes are deduced. Adimensional critéria are introduced for stability and perturbation.



Poclain T.Y. 45

Escavadora-Retro Escavadora-Grua

- POTÊNCIA AUMENTADA
- ROTAÇÃO TOTAL E CONTÍNUA
- ESTABILIDADE 100 %
- 20 BALDES DIFERENTES



REPRESENTANTES EXCLUSIVOS

Sociedade de Mecanização Industrial e Agrícola, S. A. R. L.
Avenida Padre Manuel da Nóbrega, 8-B-1.º — LISBOA
Telefone: 72 40 53 / 4 / 5

SMEIA

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

Associada: Empresa de Sondagens e Fundações

TEIXEIRA DUARTE, LDA.

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES de cimento e outros produtos — INFRAESTRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

Sede — LUANDA
Rua Serpa Pinto, 60
C. P. 2178 — Tel. 4226

LISBOA
P. da Figueira, 18, 3.º Esq.

L. MARQUES = C. P. 982
BEIRA — C. P. 1002

Companhia Portuguesa de Trefilaria

S. A. R. L.

ARMADURAS PRÉ-FABRICADAS **MALHASOL**

Tensão de segurança 3.000 Kg/cm²

AÇO BI

Tensão de segurança 4.000 Kg/cm²

AÇOS DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO

que pela eficiência técnica e económica a que conduzem, são um indispensável elemento na moderna construção civil

Para qualquer obra em betão armado consulte:

DIAL — GABINETE TÉCNICO

R. DO INSTITUTO INDUSTRIAL, 18-1.º DT.º — LISBOA
TELEFONES 67 12 24/5 E 67 37 85

"IMPERMEÁBILIS"

O IMPERMEABILIZANTE OFICIALMENTE ACONSELHADO EM TODAS AS ARGAMASSAS DE CIMENTO

Prédios, empenas, caves. — Depósitos para água, vinhos e aguardentes. — Facultam-se certificados de ensaio dos Laboratório Nacional de Engenharia Civil e da Junta Nacional do Vinho

Distribuidor geral para todo o Império Português:

ANSELMO DE MATOS

Av. Almirante Reis, 179, r/c. - Tel. 4 64 39 - LISBOA - 1

Revendedores em Lisboa:

João Pereira Vareiro & Filhos, Lda.
Rua Augusto José Vieira, 12 - Tel. 84 74 80

Manuel Pereira Matias, Lda.
Rua de Pedrouços, 105-A - Tel. 61 11 53

Manufacturas de Cimento Fortex, Lda.
Estrada de Benfica, 727 - Tel. 70 21 75

Sequeira & Santos, Lda.
R. José Joaquim Marques, 113 - Tel. 02 61 05 - MONTIJO

C. D. U. 539.413 : 539.43

FLEXÃO SIMPLES

Contribuição para a apresentação do cálculo em relação à rotura (Fase III)

POR G. FARIA DE VASCONCELLOS
(ENG. CIVIL)

«Ampliemos os nossos conhecimentos sem a ideia fixa de encontrar cálculos tipo receita.»

Saliger

«O objectivo do cálculo estático é mais determinar ou prever a segurança duma estrutura relativamente à rotura, de que determinar as tensões nela causadas pela solicitação prevista.»

E. Mörsch (1909)

1 — INTRODUÇÃO

1.1 — Entre nós, infelizmente, não está sendo utilizado, *em relação à Fase III*, o processo de determinação da resistência ou seja, a verificação de secções e cálculo da armadura; tal facto afigura-se-nos de lamentar, em face da intensa evolução sofrida pelo estudo das peças de betão armado, evolução que teórica e experimentalmente comprovou a falta de justeza do cálculo em Fase II, ou seja, o cálculo clássico, principalmente nos casos em que o esforço é maior e portanto quando o «rigor» e economia se tornariam mais necessários. Deve frizar-se que esta vantagem do cálculo em relação à rotura sobre o cálculo clássico é tanto maior quanto maior for o esforço; assim, se nas peças pouco esforçadas essa vantagem mal se notaria, nas muito esforçadas, seria surpreendente a economia verificada (vejam-se exemplos no final deste trabalho). Se por outro lado quisermos atender, de modo objectivo e particular, à qualidade dos materiais a empregar, o «cálculo à rotura», torna-se muito mais realístico e seguro que o clássico. Os métodos clássicos, assentando em bases elásticas e portanto em diagramas tensões-deformações lineares, «ignoram» as possibilidades plásticas dos materiais, não permitindo assim uma exploração completa e perfeitamente viável das suas qualidades.

Como justificação do esquecimento a que parece ter sido votado o cálculo à rotura, é costume responsabilizar-se o Regulamento do Betão Armado, dizendo-se que ele não o permite, o que aliás estaria de certo modo em contradição com o Regulamento de Segurança das Construções Contra os Sismos visto nele ele estar previsto. Sejamos justos quanto ao R.B.A., pois que ele simplesmente omite, como aliás seria de prever, se atendermos à data da sua promulgação e omitir, neste caso, não é proibir. O nosso R.B.A. diz textualmente: «os cálculos de resistência não podem ser feitos por métodos empíricos mas sòmente por métodos científicos baseados em dados experimentais»; ora o cálculo em relação à rotura tem precisamente uma base científica e experimental mais desenvolvida e actualizada que o cálculo clássico, conduzindo a resultados pràticamente coincidentes com os obtidos experimentalmente o que, nos casos mais delicados, não se verificava com o cálculo em Fase II. O espírito dum regulamento de carácter técnico, com certeza não é, nem pode ser, o contrariar ou entravar o desenvolvimento e aperfeiçoamento dos processos de cálculo (que é o caso) ou de construção, mas sim, «ajudar» os técnicos e evitar que se ultrapassem ou atinjam valores tidos como arriscados ou perigosos, fornecendo implìcitamente valores e conclusões que só a investigação laboratorial o poderia fazer. Na apreciação comum chega a parecer que entra em jogo um efeito psicológico: a palavra rotura, que amedronta e que possìvelmente exige assim outros betões e outros cuidados, quando afinal o nome «cálculo à rotura» é abreviação deste outro «cálculo em relação à rotura», o que, por si só, não implica o emprego de betões melhores nem piores dos que usualmente se empregam.

Entretanto será conveniente esclarecer desde já, que, seja qual for o «cálculo em relação à rotura», em betão armado, é factor obrigatório não tolerar qualquer espécie de plastificação